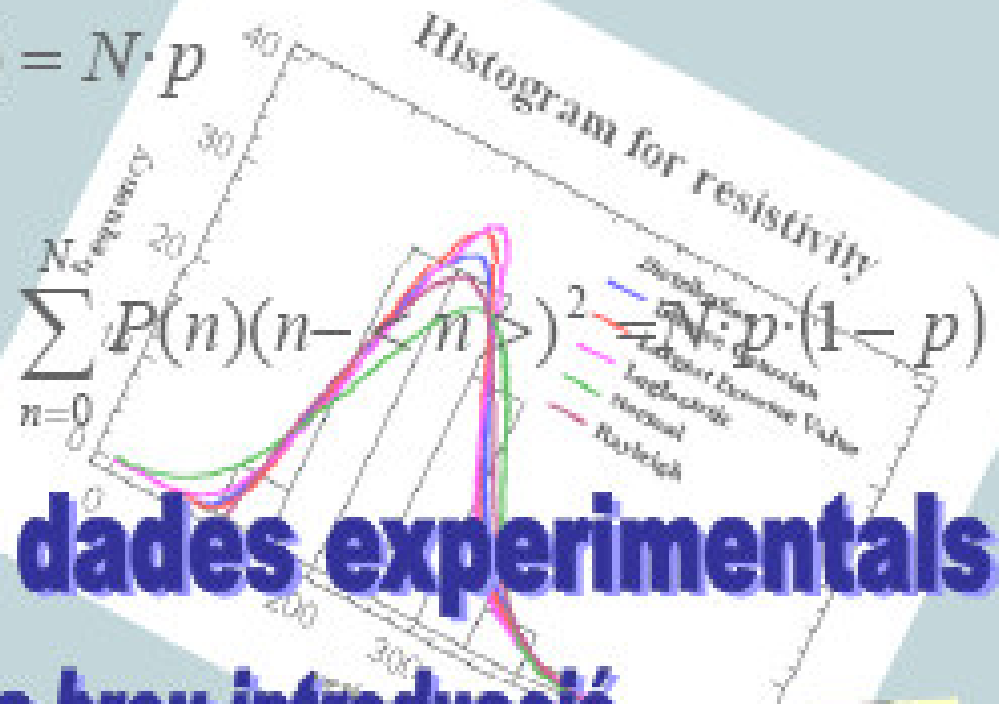


$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n \cdot P(n) = N \cdot p$$

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=0}^N P(n) (n - \langle n \rangle)^2 = N \cdot p \cdot (1 - p)$$



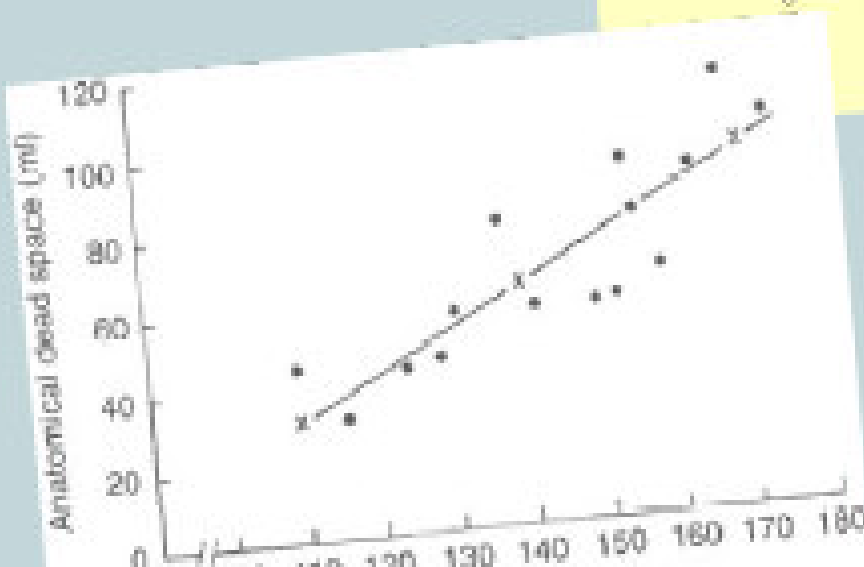
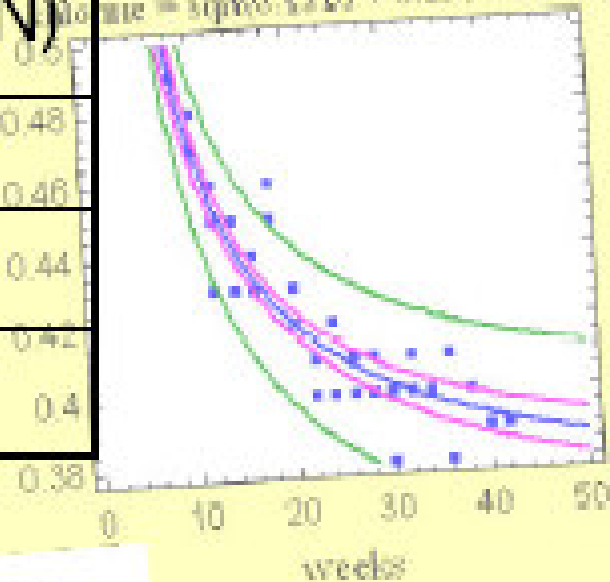
Anàlisi de dades experimentals

Una breu introducció

x (cm)	y (N)	δy (N)
10.0	37	2
20.0	28	1
30.0	21	1

Plot of Fitted Model

$$y = \log(0.4318 + 0.8957/\text{weeks})$$



Salvador Bal·le
 Dept. de Física
 UIB

L'objectiu fonamental d'aquest text és presentar de manera resumida i breu, amb un plantejament eminentment pràctic, alguns dels conceptes comuns, dels procediments habituals i de les estratègies típiques que fem servir en encarar-nos amb les tasques de laboratori. Aquests, però, tenen un abast més gran i apliquen a molts d'altres àmbits.

La finalitat cercada és presentar les eines de tractament de dades als neòfits d'una manera simple i pràctica, de manera que moltes de tècniques i idees puguin ser usades ràpidament en l'elaboració de les pràctiques de laboratori i els corresponents informes.

Això implica limitacions en el tractament de molts dels temes, i en aquest manual ens limitarem sovint a donar-ne només una primera visió que caldrà completar amb un o més dels llibres especialitzats. Hi ha un gran nombre d'excel·lents texts dedicats al tractament de dades (vegeu-ne una breu i personal selecció a la secció Bibliografia) que discuteixen amb detall i rigor els principis i tècniques necessaris.

Per acabar, voldria agrair a Na Francesca Garcias, N'Alejandro Orfila i Na Catalina Llabrés la lectura crítica de les diferents versions prèvies d'aquest text i el seu encoratjament per a elaborar-lo.

Esporles, Agost 2006

0. Introducció.....	4
1. Mesura, precisió i incertesa.....	5
2. Dades experimentals i variables aleatòries.....	8
3. Variables aleatòries, probabilitat i distribució de probabilitat.....	10
a. Variables aleatòries.....	10
b. Probabilitat i densitat de probabilitat.....	10
c. Principals distribucions de probabilitat per a variables discretes.....	11
d. Principals densitats de probabilitat per a variables aleatòries contínues.....	14
4. Dades experimentals i distribucions subjacents.....	17
a. Estimació de paràmetres.....	18
b. El límit de l'error instrumental.....	19
c. Els casos de poques mesures.....	20
d. Comunicació del resultat: xifres significatives i barres d'error.....	20
e. Test χ^2 de la distribució.....	21
f. Exemples.....	22
5. Comparació i combinació de mesures. Propagació d'errors.....	24
a. Comparació de mesures.....	24
b. Combinació de mesures.....	25
c. Mesures indirectes i propagació d'errors.....	25
6. Dependència estadística. Correlació i dependència mútua.....	28
a. Variables estadísticament independents.....	28
b. Correlació lineal.....	29
c. Correlació lineal i ajustament de funcions a dades.....	31
d. Exemples.....	35
7. Realització dels experiments i comunicació de resultats.....	40
a. Notes experimentals.....	40
b. La memòria o informe.....	41
Apèndix I: El principi de màxima versemblança.....	43
Bibliografia.....	44

0. Introducció

Des de l'inici de la humanitat, la gent ha provat d'entendre el món, les relacions entre els seus components i els fenòmens que hi ocorren. Entendre un fenomen vol dir ésser capaç de descriure'l, saber quines són les seves causes, i com canvis en aquestes modifiquen el fenomen.

Aquesta és la base de tot coneixement, i en el cas de la ciència, s'han desenvolupat una sèrie de procediments, normes i protocols (l'anomenat *mètode científic*) amb la finalitat que aquest coneixement sigui el més objectiu i rigorós possible. Aquestes eines, que han permès el progrés científic i tecnològic del que gaudim, estan basades en la lògica inductiva i deductiva i usen el llenguatge matemàtic.

El procés d'adquisició de coneixement científic involucra diferents etapes:

1. L'observació sistemàtica (*descripció del fenomen*)
2. Proposar relacions entre els objectes observats, o diferències entre ells (*formulació d'hipòtesis*)
3. Fer observacions quan es produeixen variacions –naturals o controlades- dels objectes que hem suposat que estaven relacionats amb el fenomen a fi de comprovar si les relacions existeixen (*experimentació*)
4. Verificar les relacions, si es troben (*predicció*)
5. Aplicar el coneixement de la relació quan es verifica (*control*)
6. Emmarcar la relació en el context d'altres possibles relacions (*teoria*)

En tot aquest procés, haurem de prendre contínuament decisions sobre la validesa o falsedat de les hipòtesis formulades, sobre la verificació de les nostres prediccions, etc. Això implica que ens podem equivocar i admetre com a certa una hipòtesi falsa o viceversa. Controlar aquest risc, i saber fins a quin punt les nostres afirmacions són “segures”, és una de les tasques principals del treball científic. La manera de fer-ho és analitzant si les dades són o no compatibles amb la hipòtesi que formulem, i en aquest estadi és on juguen un paper primordial les tècniques que exposarem al llarg d'aquest text.

És clar que d'hipòtesis n'hi ha moltes, i cadascuna requerirà un procés de verificació específic. En aquest sentit, però, hi ha una hipòtesi molt simple però que ha estat molt rellevant en l'avenç científic, la denominada *hipòtesi nul·la*. Planerament, podem enunciar-la dient que el que observem és purament fruit de l'atzar, i sovint hem de decidir si acceptar-la o no com a primera passa del mètode científic. L'avantatge de la hipòtesi nul·la és que és més senzilla de comprovar que qualsevol de les innumerables alternatives, i fixeu-vos que és en certa mesura equivalent a les demostracions per reducció a l'absurd que coneixeu de matemàtiques: si les nostres dades són compatibles amb aquesta hipòtesi, no cal que continuem endavant.

Les regles per a decidir sobre la veritat o falsedat d'una hipòtesi (és a dir, acceptar-la o rebutjar-la) es basen doncs en l'estudi dels fenòmens aleatoris, i són particularment útils i acceptables perquè ens diuen, amb una determinada precisió, quina és la probabilitat de cometre un error en prendre la decisió d'acceptar o no la hipòtesi.

1. Mesura, precisió i incertesa.

La mesura és un aspecte fonamental del mètode científic, perquè l'etapa d'experimentació implica detectar variacions en el fenomen observat a partir de variacions en les magnituds que hipotèticament el controlen. Encara més important és per arribar a convertir el nostre coneixement científic en tecnologia, generant un producte de consum que es comporti exactament com era previst per a dur a terme la seva funció sense l'auxili de personal especialitzat.

Mesurar és comparar de manera quantitativa una qualitat de l'objecte o fenomen que estudiem amb un patró especificat de la mateixa classe. Per tant, mesurar requereix tres passes independents:

- La definició del patró
- Establir el procediment de comparació, i
- Quantificar la relació

Definir aquest procediments és la tasca de la Metrologia, la qual juga un paper molt important per a sistematitzar els resultats –és a dir, per assegurar que siguin reproduïbles per altra gent.

Un exemple d'aquesta idea de mesura com a comparació és l'ús de la balança: definim un patró (per exemple, el Kg) i en construïm una mostra calibrada, les peses; en efectuar una pesada, posem a un plat el cos la massa del qual volem determinar, i afegim còpies del patró (les peses) a l'altre plat fins que anivellem els dos costats, la qual cosa ens permet quantificar la relació. D'altra banda, si volem conèixer les dimensions d'una certa peça, haurem de fer servir una altra peça amb què comparar. Aquesta peça de referència haurà estat prèviament calibrada, igual que hem calibrat les peses de la balança. És a dir, el fet de mesurar implica en qualsevol cas l'acció prèvia del calibratge del patró i de l'instrument.

Per a sistematitzar cal repetir, però cal notar que la repetició de les mesures no es fa *exactament* en les mateixes condicions: per exemple, les condicions ambientals (humiditat, temperatura, etc.) poden variar i influir en el resultat de la mesura. Si els nostres instruments són prou sensibles, detectarem canvis en els resultats associats a aquestes variacions de condicions de treball. De vegades, a més, l'objecte de la mesura no és exactament el mateix (pensem per exemple en una mesura destructiva!). En tots aquests casos, en repetir les mesures observem que –si el nostre instrument és prou fiels resultats canvien de manera aparentment aleatòria d'una mesura a la següent.

Això provoca immediatament una sèrie de qüestions:

- Ho estem fent bé?
- És important la variació?
- Quin és el resultat "correcte"? Pitjor encara, existeix? Podem determinar-lo?

Les respostes no són evidents. La primera pregunta, relativa a la nostra manera d'operar i a la tria que hem feta del disseny de l'experiment, es correspon amb el que s'anomenen *errors sistemàtics*: si el nostre procediment és incorrecte, o si l'instrument no ha estat calibrat, trobarem un resultat que serà diferent del que trobin els altres investigadors. La nostra mesura serà *inexacta*, en comparar-la amb les que trobin els altres o amb un valor acceptat, si es coneix. Els errors sistemàtics solen ser molt difícils de detectar i corregir, i per això cal adquirir experiència per a intuir-los i evitar-los.

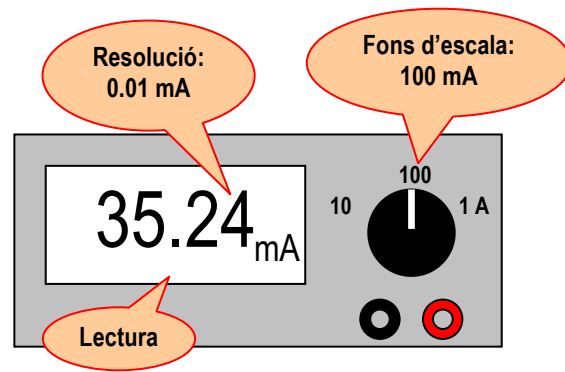


Figura 1: Estructura d'un instrument digital

La segona pregunta es refereix al conjunt de les nostres mesures, sense comparar-les amb les d'altra gent. Com ja hem comentat, si el nostre instrument no té prou resolució sempre trobarem la mateixa lectura, però si en té prou, al menys la darrera xifra de l'instrument ballarà contínuament. Aquestes variacions es denominen *l'error aleatori, so- roll o fluctuacions*, i limiten la precisió amb què podem conèixer el valor de la magnitud estudiada en major mesura que la resolució instrumental. Quant menors siguin les variacions que hi ha en el nostre conjunt de mesures, major serà la nostra *precisió*, i més segurs podrem estar del nostre resultat.

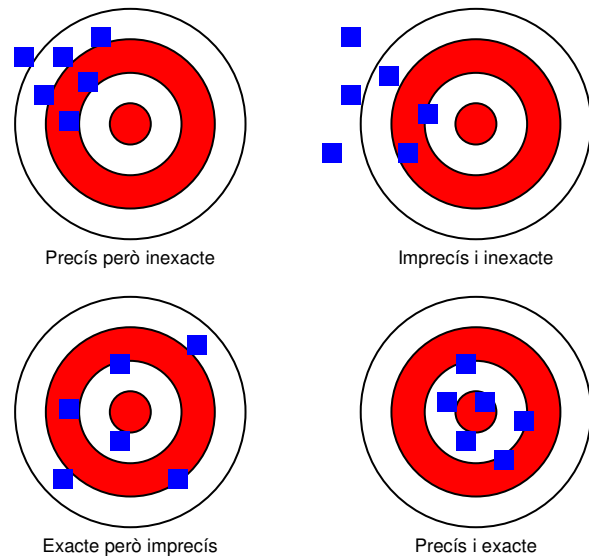


Figura 2

El resultat d'un bon experiment és exacte i precís. Noteu, però, que el resultat d'un experiment pot ser inexacte sent precís, o imprecís sent exacte. La situació es pot comparar amb el tir al blanc (vegeu la Figura 2). Si el centre de la diana correspon al "millor resultat", i els quadrets blaus representen les nostres mesures (amb el costat determinat per la resolució instrumental), podem tenir diferents situacions. Quan el nostre núvol de mesures cobreix el centre tenim un resultat exacte, i inexacte altrament. Si el núvol és extens, el resultat és imprecís, i precís si és reduït.

En la pràctica professional, no sabem amb anterioritat quin ha de ser el resultat de la mesura. Per això, caldrà pensar bé quin procediment i quins instruments usar, i pensar també a alternatives que ens permetin tenir confiança en el resultat, però sobretot caldran moltes de mesures independents, tant nostres com d'altra gent, per arribar a tenir un coneixement del veritable valor dels resultats.

2. Dades experimentals i variables aleatòries

Quan fem un experiment, tenim una col·lecció de dades de les quals en volem extreure informació. Una de les primeres informacions importants és quina casta de dades tenim, i quin és l'origen de les possibles incerteses en els nostres resultats.

Un primer aspecte a considerar és si la variable que volem mesurar és *discreta* o *contínua*. Una variable discreta és aquella els valors de la qual només poden ser enters, o es pot numerar fàcilment. Exemples de variables discretes són el nombre d'àtoms de gas dins un recipient, el nombre de fulls en un paquet de folis, el nombre de cotxes en un aparcament, etc. Variables que es poden numerar són, per exemple, els alumnes d'una classe, les cares d'una moneda, etc.

En canvi, variables contínues són aquelles que poden prendre valors infinitament propers l'un a l'altre, com per exemple l'alçada d'una persona, l'interval de temps entre dos esdeveniments, l'angle i el radi on un dard es clava a una diana, etc.

En el cas que fem mesures d'una variable discreta, la resolució instrumental hauria de ser inferior a 1 si volem resoldre esdeveniments individuals. En canvi, amb variables contínues, sigui quina sigui la resolució instrumental, sempre tindrem una incertesa en el valor de la variable degut a l'instrument utilitzat.

Considerem per exemple el cas en què volem mesurar la temperatura d'un tassó d'aigua que conté gel. Podem fer-ho amb un termòmetre (Fig. 3a) o amb un termoparell (Fig. 3b), que és un sensor de temperatura més ràpid i precís que un termòmetre.

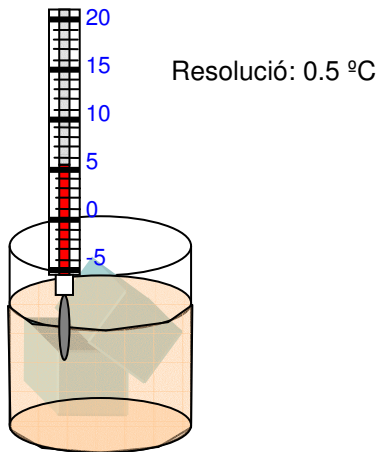


Figura 3a

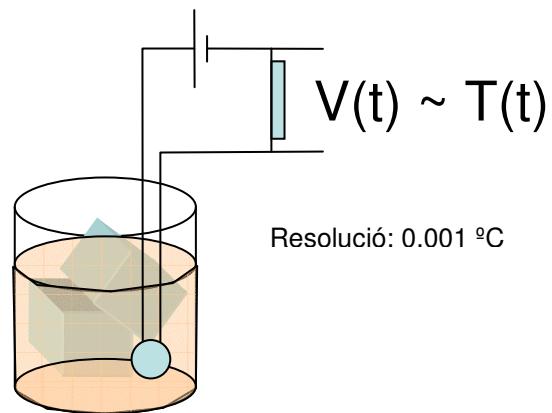


Figura 3b

En el primer cas, si per exemple mesurem cada 5 segons, sempre trobarem una lectura entre 5 °C i 6 °C, pel que podríem dir que la temperatura és $T \in [5 \text{ °C}, 6 \text{ °C}]$; la forma habitual d'expressar-ho és dient que la temperatura és $T = (5.5 \pm 0.5) \text{ °C}$, on donem la resolució de l'instrument com a precisió de la nostra mesura, ja que aquesta és l'única font de limitació.

Ara bé, si usem el termoparell amb un enregistrator de temperatura que ens faci una mesura cada mil·lisegon, trobem una situació diferent, com la mostrada a la Figura 4. Ara, amb l'instrument de major resolució no trobem sempre el mateix resultat, i cada lectura difereix de les altres de manera impredecible. Aquestes són les fluctuacions de la lectura, i ara són majors que la resolució instrumental, de manera que són elles i no l'instrument les que ens limiten la precisió de la mesura. Com es veu a la figura, les nostres dades estan concentrades al voltant de $5.5\text{ }^{\circ}\text{C}$, amb variacions dins un interval típic de $0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Però, què en podem dir, de la temperatura del tassó?

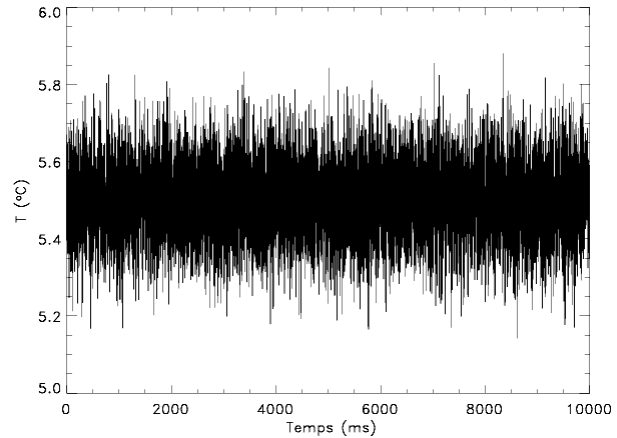


Figura 4

Si el nostre experiment està ben dissenyat, cadascuna de les lectures és assimilable al resultat d'un sorteig on els possibles resultats tenen una distribució de probabilitat subjacent donada. Si la coneixem, això ens hauria de permetre determinar el resultat i la incertesa de la nostra mesura. Desafortunadament, la pregunta "Quina és la distribució de probabilitat subjacent a les nostres dades?" no té una resposta directa i simple. Per a respondre-la, cal en primer lloc repassar els conceptes bàsics de probabilitat (secció 3) i donar els mètodes necessaris per aplicar-ho al nostre problema concret (secció 4).

3. Variables aleatòries, probabilitat i distribució de probabilitat

a. Variables aleatòries.

Una variable aleatòria és aquella el valor de la qual canvia impredeciblement d'una mesura a la següent. Exemples típics són el valor d'un dau d'una tirada a la següent, o saber si en llençar una moneda sortirà cara o creu. També, si comteu el nombre de cotxes que passen per un cert indret durant un temps determinat, o el nombre de desintegracions radioactives que es produeixen en un bloc de material durant un temps donat, no obtindreu sempre exactament el mateix resultat. Aquestes són *variables aleatòries discretes*.

Les variables aleatòries contínues poden prendre qualsevol valor, al menys dins d'un interval especificat, com l'angle i el radi de l'impacte d'un dard a una diana, o el temps que passa entre dues desintegracions radioactives a una mostra d'urani.

b. Probabilitat i densitat de probabilitat.

Les variables aleatòries discretes es poden caracteritzar per la *probabilitat* d'un esdeveniment. La probabilitat d'un esdeveniment mesura quina fracció de tots els esdeveniments correspon al que ens interessa en fer un nombre infinit de proves. Així, en una moneda no trucada, la probabilitat de treure cara és 1/2, és a dir, $P(\text{cara}) = 1/2$; en un dau no trucat, la probabilitat de treure "4" és 1/6, és a dir, $P(\text{"4"}) = 1/6$; etc.

Denotarem per E un esdeveniment qualsevol, i per S el conjunt de tots els possibles esdeveniments,

$$S = \bigcup_i E_i$$

Tota la teoria matemàtica de la probabilitat es pot construir a partir dels tres axiomes d'En Kolmogorov:

- La probabilitat d'un esdeveniment E donat és entre 0 i 1, $0 \leq P(E) \leq 1$
- La probabilitat de que passi qualque esdeveniment és 1, és a dir, $P(S) = 1$
- Si dos esdeveniments A i B són disjunts, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si coneixem la probabilitat de cada esdeveniment simple (la *distribució de probabilitat*) podem calcular la probabilitat d'esdeveniments combinats, quin és el resultat més probable, etc.

En el cas de les variables aleatòries contínues, no podem parlar de la probabilitat de trobar un resultat determinat, sinó de la probabilitat de que el resultat es trobi en un determinat interval. Així, podem parlar de la probabilitat de que el temps entre dos successos sigui inferior a una hora, $P(0 < t < 1 \text{ h})$, o de la probabilitat de que una barra es trenqui per un punt situat entre 15 cm i 20 cm de l'origen, és a dir, $P(15 \text{ cm} < x < 20 \text{ cm})$. En general, si y és el resultat, podem definir la probabilitat de que es trobi a l'interval $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ com $P(x - \Delta x \leq y \leq x + \Delta x)$.

Si considerem el límit en que Δx és molt petit, podem parlar de la *densitat de probabilitat* de la variable x com

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P(x - \Delta x \leq y \leq x + \Delta x)}{2\Delta x}$$

que juga el mateix paper que la distribució de probabilitat de les variables discretes. Els axiomes d'En Kolmogorov ens imposen que

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

c. Principals distribucions de probabilitat per a variables discretes.

Malgrat existir una enorme diversitat de variables aleatòries discretes, moltes tenen una distribució de probabilitat igual a la d'altres. De fet, hi ha distribucions de probabilitat que apareixen molt sovint i ens convé conèixer-ne les principals característiques i propietats. Aquí revisarem les principals propietats d'algunes de les que apareixen més freqüentment en el treball de laboratori.

c1. La distribució uniforme

La distribució uniforme és aquella en la que tots els esdeveniments simples tenen la mateixa probabilitat, i és la que trobem normalment en els jocs d'atzar. Per exemple, en llençar un dau la probabilitat de treure un nombre determinat (entre "1" i "6") és 1/6. També, en llençar una moneda la probabilitat de treure "cara" és 1/2, igual que la de treure "creu". Finalment, tots els nombres de la ruleta tenen una probabilitat 1/37 d'aparèixer quan el croupier llança la boleta.

c2. La distribució d'En Bernoulli

La distribució d'En Bernoulli és la corresponent a una variable discreta que només pot tenir dos valors, A i B, amb probabilitats $p(A) = p$ i $p(B) = 1 - p$. És útil per a estudiar problemes en els que ens interessem per dues alternatives, tipus "èxit" i "fracàs". Per exemple, el cas del llançament d'un dau es pot reduir a una distribució d'En Bernoulli si el que ens interessa és l'esdeveniment $A = \text{"treure un 6"}$. En aquest cas, $p(A) = 1/6$, i l'esdeveniment complementari, $B = \text{"no treure un 6"}$ té $p(B) = 5/6$. Com podeu veure, és equivalent al cas d'una moneda trucada, on la probabilitat de treure "cara" no és igual a la de treure "creu".

c3. La distribució binomial

La distribució binomial apareix molt sovint, quan repetim proves amb variables que tenen una distribució d'En Bernouilli. Per exemple, suposeu que llencem cinc daus, i ens demanem quantes de vegades sortirà "1". Clarament, el nombre d'"1" pot ser qualsevol entre cap i cinc, però si fem moltes de proves, veurem que és més fàcil trobar-ne cap, un o dos que no cinc. Si l'esdeveniment que ens interessa ("treure 1", a l'exemple) té probabilitat p , la probabilitat de tenir n èxits en fer N proves és donada per

$$P(n) = B(n; p, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Clarament, aquesta distribució de probabilitat només està definida per $0 \leq n \leq N$, i depèn del nombre de proves que fem (N) i de la probabilitat d'èxit que tinguem, p . Fixeu-vos que la podem identificar amb el terme n -èssim del desenvolupament del binomi d'En Newton $(p + (1-p))^N$. A la Figura 5 es mostren dos casos particulars d'aquesta distribució, i es pot veure que quan $p < 0.5$ la distribució es concentra al voltant de valors baixos de n , i a l'inrevés.

Una pregunta que ens podem plantejar és quants d'èxits esperem tenir en fer N proves. El valor esperat del nombre d'èxits és

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n \cdot P(n) = N \cdot p$$

tal i com ens diu la intuïció.

Però podem anar més lluny, i demanar-nos si la distribució és ampla o estreta al voltant d'aquest valor esperat. Per això podem calcular

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=0}^N P(n) (n - \langle n \rangle)^2 = N \cdot p \cdot (1-p)$$

Aquesta magnitud es denomina la *variança* de la distribució, i sa arrel quadrada, la *desviació típica*, que com son nom indica, ens diu dins quin interval al voltant del valor esperat, $\langle n \rangle$, trobarem n . Una variança gran correspon a distribucions "amplès", és a dir, amb molta de variació, i viceversa. Deixant de banda el nombre de proves, N , la variança és major si p és al voltant de 0.5, mentre que és menor si p s'acosta a 0 o a 1.

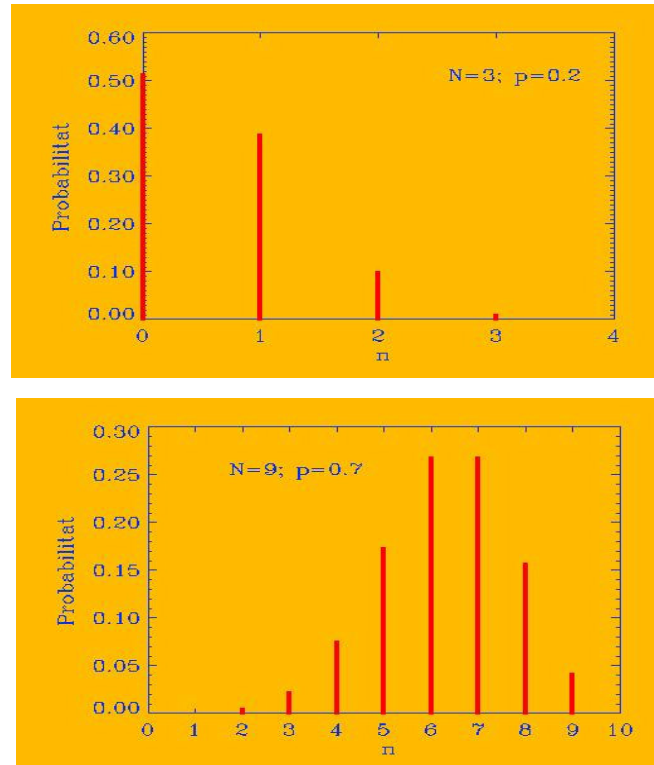


Figura 5

c4. La distribució d'En Poisson

La distribució d'En Poisson apareix quan fem un nombre molt elevat de proves ($N \rightarrow \infty$) amb una probabilitat d'èxit petitíssima ($p \rightarrow 0$). Un exemple d'aquesta situació és la desintegració radioactiva: en una mostra, el nombre d'àtoms és enorme, gairebé infinit, i la probabilitat de que un àtom es desintegri és petitíssima, gairebé zero. Un altre exemple és el corrent generat a un fotodetector quan hi arriba llum: hi ha moltíssims d'electrons, però cadascun té una probabilitat petita d'absorbir un fotó dels incidents. En aquests casos, si el nombre esperat d'èxits és $N \cdot p = \lambda$, la probabilitat de tenir $n \geq 0$ èxits és donada per

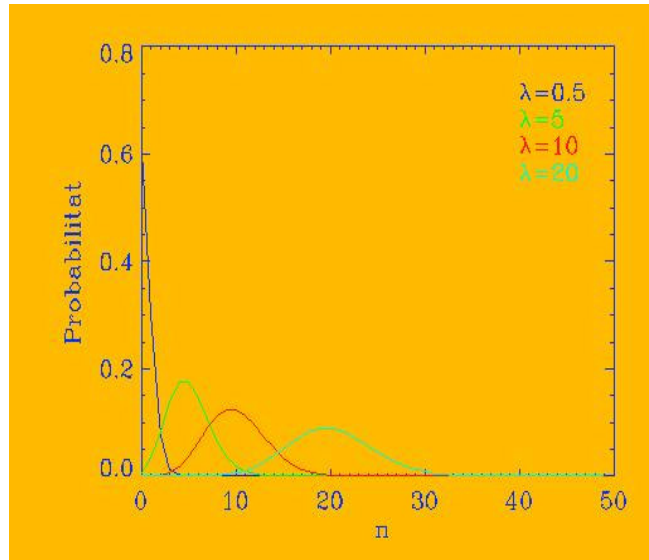


Figura 6

$$P(n) = P(n; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

i és nul·la si $n < 0$. El paràmetre λ és qui controla la forma de la distribució, tal i com es mostra a la Figura 6.

Per a la distribució d'En Poisson, el valor esperat del nombre d'èxits és

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n; \lambda) = \lambda$$

i la variància és

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n \rangle)^2 \cdot P(n; \lambda) = \lambda$$

La igualtat del valor esperat i la variància és una característica de la distribució d'En Poisson, i se sol usar com a primera indicació per a determinar si una col·lecció de dades segueix o no aquesta distribució.

d. Principals densitats de probabilitat per a variables aleatòries contínues.

Hi ha moltes (tantes com pugueu imaginar i més) densitats de probabilitat diferents. Malgrat aquesta riquesa tan gran, n'hi ha un grapat que apareixen molt sovint en tractar dades contínues, i que cal conèixer bé, doncs són la base per a molts de resultats posteriorment necessaris.

d1. La distribució d'En Gauss, o normal.

Una densitat de probabilitat que molt sovint apareix per a variables contínues és l'anomenada distribució d'En Gauss, o normal. Per a una variable aleatòria x , aquesta distribució es donada per

$$f(x) = G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La distribució normal es caracteritza per dos paràmetres, μ i σ , i és definida per a qualsevol valor, és a dir, per a $-\infty \leq x \leq +\infty$. Aquesta distribució té forma de campana i és simètrica al voltant del valor $x = \mu$ (vegeu Figura 7), és a dir, que el valor de la distribució és el mateix per a dos punts equidistants de μ .

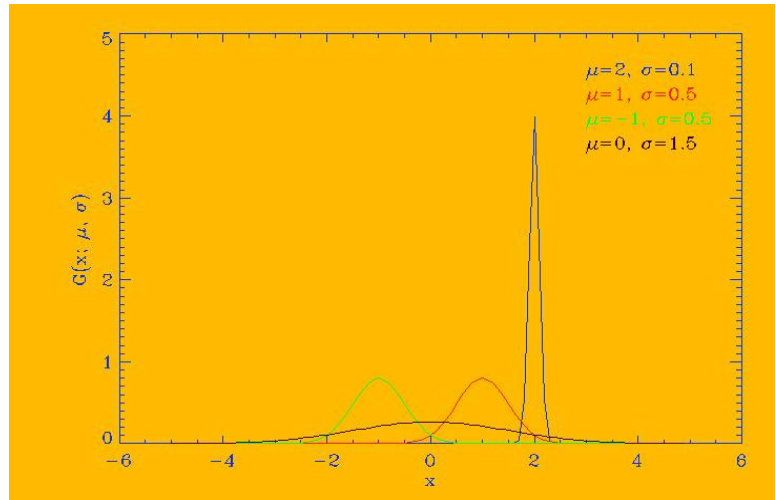


Figura 7

El valor esperat de la variable és

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot x \cdot G(x; \mu, \sigma) = \mu$$

i sa variància és

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot (x - \mu)^2 \cdot G(x; \mu, \sigma) = \sigma^2$$

Clarament, quan major és σ , més ampla és la distribució (vegeu Figura 7).

Una propietat útil de la distribució normal és sa *invariància d'escala*. Aquesta propietat es refereix a que qualsevol distribució normal $G(x; \mu, \sigma)$ es pot escriure com la distribució $G((x - \mu)/\sigma; 0, 1)$ fent el canvi de variable $z = (x - \mu)/\sigma$. Aquesta variable z és l'original, x , desplaçada pel valor esperat i escalada per la variància, i té valor esperat zero i variància 1. Així, sempre podem fer un canvi de variable que ens porti a una distribució normal de valor esperat nul i variància 1. A la Taula I es donen una sèrie d'integrals de la distribució normal $G(z; 0, 1)$ que apareixen molt sovint en la pràctica.

Com ja s'ha dit abans, la distribució normal apareix molt sovint, i rep un tractament destacat en tots els tractats de probabilitat i estadística i d'anàlisi de dades. Hi ha diferents motius per a això. En primer lloc, les distribucions binomial i d'En Poisson es poden aproximar per distribucions gaussianes en determinades condicions: si $N \cdot p \geq 5$ i $N \cdot (1 - p) \geq 5$, la distribució binomial s'assembla molt a la normal; igualment, la distribució d'En Poisson s'assembla molt a la d'En Gauss quan $\lambda \geq 10$. Això té un gran interès pràctic: en aquests límits, podem evitar els llargs i tediosos càlculs que amb variables discretes es necessiten per a determinar les probabilitats d'esdeveniments i usar el nostre coneixement de la distribució normal i ses integrals.

En segon lloc, el *Teorema del Límit Central* ens diu que si tenim un conjunt de variables aleatòries $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, cadascuna de les quals té valor esperat $\langle X_i \rangle$ i variança σ_i^2 , aleshores la variable $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ té:

- Valor esperat $\langle S \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \dots + \langle X_N \rangle$
- Variança $\sigma_S^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2$
- Distribució aproximant-se a una normal a mesura que creix N

Com que en un experiment solem tenir moltes de fonts d'aleatorietat, la variable observada sovint té una distribució molt aproximadament normal.

d2. La distribució t d'En Student

Malgrat l'afirmació anterior, per a tenir la distribució normal subjacent habitualment ens cal un nombre de dades N molt gran. Sovint, no en tenim tantes, de dades, i aleshores distribució de la nostra mostra (les dades que hem arplegat) es desvia de la gaussiana, seguint la distribució d'En Student. Quan el nombre de dades que tenim és inferior a 25, les diferències solen ser apreciables.

d3. La distribució exponencial

Una altra densitat de probabilitat que apareix sovint és la distribució exponencial, que està estretament relacionada amb la distribució d'En Poisson. La darrera es demana quina és la probabilitat d'observar n esdeveniments en un interval finit on el nombre mitjà d'esdeveniments és λ , mentre que la primera es demana quin és l'interval entre dos esdeveniments consecutius. La distribució exponencial és donada per

$$P(x) = E(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta x}$$

i és definida només per a $x \geq 0$. Per a la distribució exponencial, tenim un valor esperat i variança donats per

$$\langle x \rangle = \int_0^{+\infty} dx \cdot x \cdot E(x; \beta) = \beta$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \beta^2$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \, z^{2n} \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{n! 2^n}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \, z^{2n+1} \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 0$
$\int_0^{+\infty} dz \, z^{2n+1} \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{n! 2^n}{\sqrt{2\pi}}$
$\int_0^{+\infty} dz \, z^{2n} \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, z^{2n} \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 1$
$\int_{-\infty}^0 dz \, \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 0.5 = \int_0^{+\infty} dz \, \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}$
$\int_{-1}^{+1} dz \, \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 0.6826 \qquad \int_{-2}^{+2} dz \, \frac{e^{-(z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} = 0.9544$

Taula I: Integrals útils de la distribució normal

4. Dades experimentals i distribucions subjacents

Com ja hem discutit a la secció 2, quan fem un experiment, tenim una col·lecció de dades de les quals en volem extreure informació, i una de les més importants és determinar-ne la distribució de probabilitat subjacent, que ens hauria de permetre determinar el valor més probable, l'interval de variació característic, etc.

Per exemple, amb les dades de la Figura 8 voldríem saber quina és la temperatura de l'aigua, i determinar-ne la incertesa. Si la distribució fos gaussiana, podríem assignar el valor esperat de la distribució a "la temperatura" de l'aigua, i determinar-ne la incertesa a partir de la variança, tal i com veurem més endavant. Com ja hem dit abans, sovint podem suposar –gràcies al Teorema del Límit Central– que és gaussiana, però en general no existeix cap garantia de que sigui així.

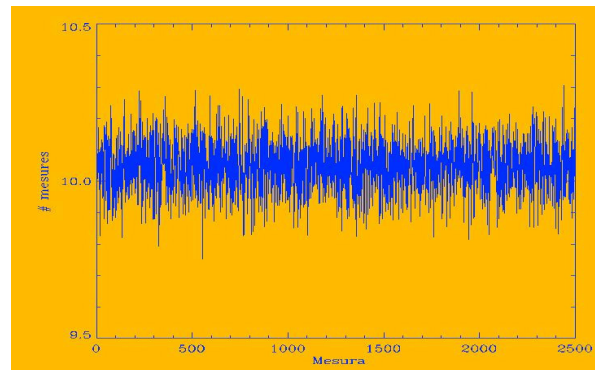
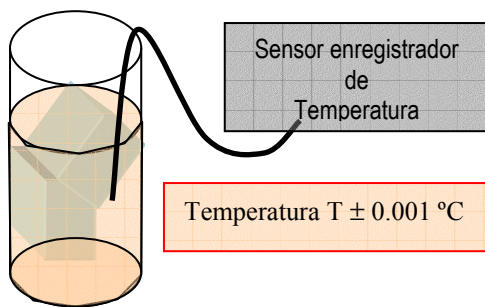


Figura 8

Una primera indicació de quina és la distribució subjacent a les nostres dades la podem tenir visualment, construint-ne *l'histograma*. Per a fer-ho, agafem tot l'interval de variació de les dades i el dividim en trossos –no necessàriament iguals– que no es superposin, anomenats *bins*. Aleshores comptem quantes de les nostres dades cauen dins cada bin, dividim aquest nombre per la grandària de cada bin (si els bins són iguals, aquesta darrera passa no és imprescindible) i ho representem a un gràfic com el de la Figura 9. L'elecció de la grandària de cada bin és molt important: el mínim permès és donat per l'error instru-

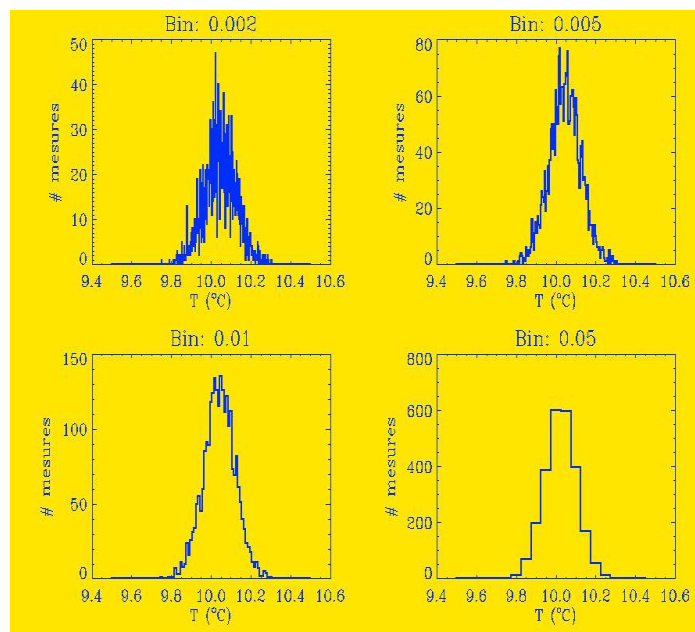


Figura 9

mental, però cal que dins cada bin hi hagi un nombre substancial de dades sense que es perdin els detalls; si el bin és massa petit, hi ha variacions molt brusques, i si és massa gran, totes les dades es concentren en pocs bins (vegeu Figura 9). La forma de l'histograma ja pot ser reveladora de la distribució de probabilitat subjacent a les nostres dades.

Un mètode més sofisticat i precís per a determinar-la és el següent: podem *suposar* que les nostres dades provenen d'una determinada distribució (a partir de l'histograma, per exemple), fer-ne una *estimació dels paràmetres*, i finalment, analitzar si la hipòtesi feta és *consistent* amb les dades experimentals.

a. Estimació de paràmetres.

L'estimació de paràmetres és una part fonamental de la nostra tasca, i es basa en el Principi de Màxima Versemblança. Aquí no el discutirem en detall (en trobareu un breu tractament a l'Apèndix I), sinó que només en presentarem els resultats que ens calen per a avançar, però el trobareu analitzat en detall a la bibliografia.

a1. La distribució gaussiana

Considerem una variable aleatòria X la distribució de probabilitat de la qual és una gaussiana $G(x; \mu, \sigma)$. Quan fem N extraccions de la variable, tenim una col·lecció de dades $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, a partir de la qual podem fer una estimació dels paràmetres de la distribució de probabilitat. D'acord amb el Principi de Màxima Versemblança, la millor estimació que podem fer de μ és donada per

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

és a dir, per la mitjana de les nostres dades. La millor estimació de la variança és donada per

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - m)^2$$

Aleshores, per a donar una estimació de la incertesa podríem dir que el 65% de les dades es troba dins de l'interval $[m - s, m + s]$. La pràctica habitual, però, és diferent, i se sol donar la millor estimació de la incertesa de m . Aquesta és s/\sqrt{N} , que indica que el 65% dels experiments que fem donaran una estimació de μ en l'interval $[m - s/\sqrt{N}, m + s/\sqrt{N}]$, que s'indica com $\mu = m \pm s/\sqrt{N}$. La incertesa s/\sqrt{N} també s'anomena *l'error absolut* de la nostra mesura, i fixeuvos que té les mateixes unitats que la variable; de vegades, però, s'usa *l'error relatiu*,

$$\varepsilon = \frac{s/\sqrt{N}}{m}$$

que no té unitats i ens dóna una idea més ràpida de la precisió de la nostra mesura, ja que compara la incertesa en la mitjana amb la pròpia mitjana. Així, valors petits d' ε suposen mesures precises, amb un error percentual petit, i viceversa.

a2. La distribució d'En Poisson

La distribució d'En Poisson, que hem vista abans, apareix sovint en fer experiments on es vol determinar quants d'esdeveniments ocorren en un interval fixat: quants de cotxes passen en un minut per un indret, quants d'avions parteixen de l'aeroport en un minut, quants de neutrins detectem en una hora, quants de fulls de paper hi ha en 1 cm, etc. Si repetim la nostra mesura N vegades, tindrem una seqüència de resultats $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, i si la distribució de les dades és la d'En Poisson $P(n; \lambda)$, la millor estimació del paràmetre λ que podem fer és donada per

$$l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i$$

Per a fer una estimació de la incertesa de λ , ho fem com amb la gaussiana i donem la variança de la distribució (que coincideix amb λ) dividida per l'arrel quadrada del nombre de mesures, de manera que el 65% dels experiments que fem donaran una estimació de λ en l'interval $[l - \sqrt{l/N}, l + \sqrt{l/N}]$, que s'expressa dient $\lambda = l \pm \sqrt{l/N}$.

a3. La distribució binomial

Per a la distribució binomial $B(n; p, N)$, també es pot determinar quina és la millor estimació de p a partir d'una col·lecció de dades $\{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ obtingudes en repetir M vegades la mesura. La millor estimació de p és donada per

$$\hat{p} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M n_i$$

i sa incertesa es pot estimar com

$$s_p = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{NM}}$$

indicant que el 65% dels experiments que fem donaran una estimació de p dins l'interval $[\hat{p} - s_p, \hat{p} + s_p]$, que s'indica com $p = \hat{p} \pm s_p$.

b. El límit de l'error instrumental.

Hi ha un punt en la secció anterior que mereix una discussió més detallada: suposeu per un instant que fem un nombre enorme de mesures, de manera que l'error estadístic de la mitjana, s/\sqrt{N} , esdevé inferior a la resolució instrumental. Això pot fer-vos pensar que fent prou mesures amb un instrument de poca resolució arribaríem a determinar amb precisió arbitrària el valor de la magnitud cercada. Clarament, això no té cap sentit. D'una banda, amb un instrument de baixa resolució perdem les fluctuacions estadístiques i ja no té sentit dir que diferents experiments donaran diferents estimacions de la mitjana: quan la resolució de l'instrument és igual o superior a 3σ , totes les mesures donaran el mateix resultat. D'una altra banda, recordeu que la mínima grandària de bin que podem establir és precisament la resolució instrumental, i mai podrem precisar els nostres resultats amb més precisió que l'instrument. Una forma de tenir en compte aquestes consideracions és dir que la incertesa en el resultat d'una mesura M té dues

contribucions independents¹, una estadística, δm_e , i una instrumental, δm_i , de manera que la incertesa total en el resultat és

$$\delta m = \sqrt{\delta m_e^2 + \delta m_i^2}$$

que posa de manifest les nostres limitacions. En el cas que l'error instrumental és menyspreable enfront de l'estadístic, l'error total es redueix a aquest darrer i viceversa.

c. Els casos de poques mesures.

De vegades ens resulta molt difícil, costós o fins i tot impossible fer moltes de mesures de la magnitud, de manera que el nombre de dades disponibles no ens permet fer l'ajust de paràmetres tal i com s'ha explicat abans, però ens mostra clarament l'existència de fluctuacions. Per al resultat de la mesura, sempre podem prendre la mitjana de totes les mesures, i podem fer una estimació de la incertesa amb la desviació típica de les mesures dividida per l'arrel quadrada del nombre de mesures. El problema és que, amb poques mesures, l'estimació de la desviació típica és força imprecisa, perquè fluctua fortament en repetir la mesura. En aquests casos, no hi ha una única "recepta" universalment acceptada, però se sol prendre com estimació de la incertesa la màxima desviació respecte de la mitjana dividida per l'arrel quadrada del nombre de mesures, sempre i quan la màxima desviació correspongui a un error relatiu petit; en cas contrari, es recomana fer més mesures. En qualsevol cas, en comunicar el resultat és important fer explícit quin mètode s'ha usat, i justificar-ho si és possible.

d. Comunicació del resultat: xifres significatives i barres d'error.

Amb l'estimació de paràmetres i incerteses feta, ja podem donar el que és el resultat de la nostra mesura per a la magnitud M , $M = m \pm s/\sqrt{N}$. Però, en general, m i $\delta m = s/\sqrt{N}$ seran nombres qualsevols, amb moltes de xifres decimals. Per exemple, si M és la distància entre dos punts, podem trobar $m = 1.4732491$ cm i $\delta m = 0.022754314$ cm. Però si pensem per un moment en l'origen estadístic de la incertesa, és clar que no té cap sentit donar un nombre enorme de xifres per a δm ; si a més recordem que sempre estem limitats per la resolució de l'instrument, encara menys. Per això, *s'arrodoneixen* tant la incertesa com el resultat d'acord amb les següents regles:

- La incertesa es dona amb *dues xifres significatives* si la primera xifra significativa és 1 o 2, i només amb *una xifra significativa* en els altres casos. Per a fer-ho, arrodonim a partir de la darrera xifra, per excés si aquesta és major o igual que 5 i per defecte en cas contrari. En l'exemple anterior, aleshores, tenim $\delta m = 0.022754314$ cm $\rightarrow 0.02275431$ cm $\rightarrow 0.0227543$ cm $\rightarrow 0.022754$ cm $\rightarrow 0.02275$ cm $\rightarrow 0.0228$ cm $\rightarrow 0.023$ cm.
- El resultat de la mesura es dona amb el mateix nombre de xifres significatives que la incertesa, arrodonint-lo de la mateixa manera. En l'exemple anterior, $m = 1.473$ cm.

Així, en el nostre exemple el resultat final seria $M = (1.473 \pm 0.023)$ cm.

¹ El concepte d'independència estadística es discuteix més endavant, a la secció 6

De vegades, en lloc –o a més– de donar el resultat en forma numèrica, és convenient fer un gràfic, ja que això ens permet una millor apreciació del conjunt de resultats, o ens facilita la comparació entre ells. Aleshores, la nostra millor estimació de la mesura es representa per un punt, i la incertesa del nostre resultat s'expressa gràficament mitjançant una *barra d'error* que s'estén des del punt més baix de l'interval $[m - s/\sqrt{N}, m + s/\sqrt{N}]$ fins al punt més alt d'aquest interval, tal i com es mostra a la Figura 10. Això ens permet copsar d'una ullada molts de detalls. Per exemple, podem veure com l'alumne #2 ha trobat un resultat sensiblement inferior al dels altres, i el #3, sensiblement superior. D'una altra banda, veiem que els resultats dels alumnes #1 i #4 són molt semblants, però que el #4 ha estat molt més precís, i que el #2 és el que ha trobat el resultat més imprecís.

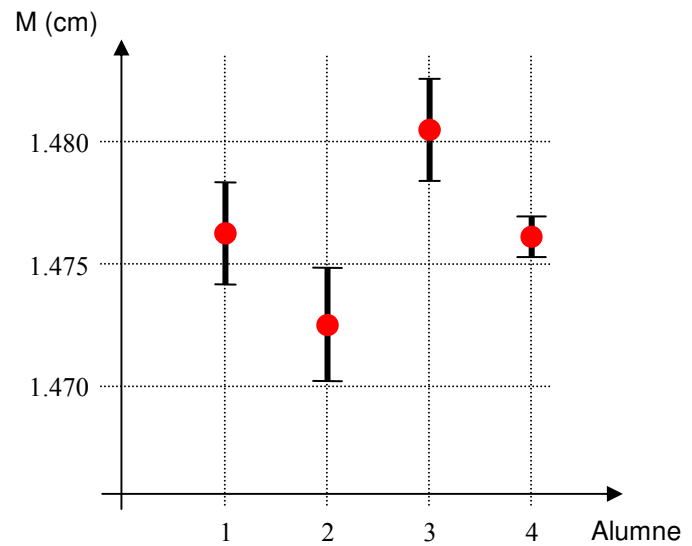


Figura 10

e. Test χ^2 de la distribució.

Una vegada hem fet a l'estimació de paràmetres del que suposem és la distribució subjacent a les nostres dades, podem analitzar si aquesta hipòtesi és consistent amb les nostres dades fent el test χ^2 de la distribució. En aquest test, l'histograma de les dades juga un paper crucial: recordeu que hem dividit l'interval de variació de les dades en bins, $\{H_1, H_2, \dots, H_K\}$, i dins cada bin $H_i = [X_{i-1}, X_i]$ hi hem observat O_i dades. Però la nostra hipòtesi per a la distribució de dades ens diu que dins aquest bin esperaríem trobar-hi E_i dades, amb

$$E_i = N \int_{X_{i-1}}^{X_i} dx f(x; a_1, \dots, a_M) = N p_i$$

on $f(x; a_1, \dots, a_M)$ és la nostra hipotètica distribució, que té M paràmetres, a_1, \dots, a_M , que hem estimat de les dades. Fixeu-vos que la integral ens dona la probabilitat de que una observació caigui dins el bin considerat, de manera que el nombre de dades dins aquest bin segueix una distribució binomial $B(n; p_i, N)$. Si tenim prou dades dins cada bin ($O_i > 5$) i els bins són prou nombrosos, podem calcular

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

que és una variable aleatòria amb una distribució ben coneguda que depèn només del nombre de graus de llibertat, f , de la nostra mostra, donat per $f = K - M - 1$.

El nombre de graus de llibertat és un concepte molt important en estadística: expressa que en el procés d'estimació dels paràmetres hem "gastat" dades que ara ja no són útils per a comprovar la hipòtesi. Com que f ha de ser $f > 0$, també ens indica que el nombre mínim de bins que hem de considerar per a comprovar una distribució amb M paràmetres és al menys $K = M + 2$, i recordeu que dins cada bin hi ha d'haver al menys cinc dades!

f	χ_o^2			
	$P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2) = 0.2$	$P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2) = 0.1$	$P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2) = 0.05$	$P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2) = 0.01$
1	1.64	2.71	3.84	6.63
2	3.22	4.61	5.99	9.21
3	4.64	6.25	7.81	11.3
4	5.99	7.78	9.49	13.3
5	7.29	9.24	11.1	15.1
6	8.56	10.6	12.6	16.8
7	9.80	12.0	14.1	18.5
8	11.0	13.4	15.5	20.1
9	12.2	14.7	16.9	21.7
10	13.4	16.0	18.3	23.2
15	19.3	22.3	25.0	30.6
20	25.0	28.4	31.4	37.6
25	30.7	34.4	37.7	44.3
30	36.3	40.3	43.8	50.9
35	41.8	46.1	49.8	57.3

Taula II: valors de χ_o^2 per a que $P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2)$ superi els valors especificats per a un nombre de graus de llibertat f donat.

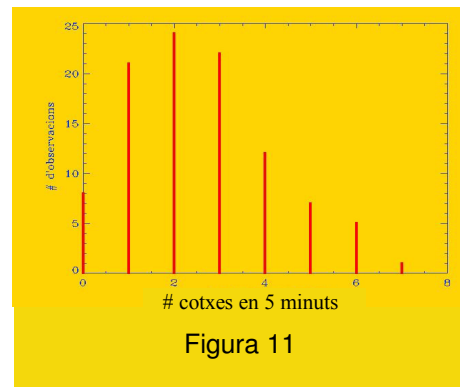
Si ara es calcula la probabilitat $P_f(\chi^2 \geq \chi_o^2)$ de trobar un valor de χ^2 igual o superior a l'observat, χ_o^2 , si aquesta probabilitat és superior a 0.1 es considera que no hi ha motiu per a dubtar de la hipòtesi feta, mentre que si és inferior a 0.05 es considera que hi ha discrepància significativa i si és inferior a 0.01, que la discrepància és altament significativa. En general, si $\chi_o^2 \sim f$ es pot considerar que no hi ha discrepància, però la Taula II us ajudarà a fer una anàlisi més precisa.

f. Exemples

d1. A un punt d'una carretera, comptem 100 vegades quants de cotxes passen per davant nostre en un interval de 5 minuts, amb els resultats de la taula.

# cotxes / 5 min	0	1	2	3	4	5	6	7	>8
# d'observacions	8	21	24	22	12	7	5	1	0

Si en fem la representació gràfica (vegeu la Figura 11), sembla que la distribució pot ser una Poisson. Una primera prova que podem fer és calcular la mitjana i la variança del nombre de cotxes que hem comptat en 5 minuts, que per a una distribució d'En Poisson han de coincidir. Amb les nostres dades trobem que $\langle \# \text{cotxes} / 5 \text{ min} \rangle = 2.55$, amb variança 2.6, que efectivament s'assemblen. Aleshores, la millor estimació del paràmetre de la distribució que podem fer és $\lambda = (2.55 \pm 0.16)$ cotxes / 5 minuts. Per a comprovar si la nostra hipòtesi d'una distribució d'En Poisson és consistent amb les dades, agrupem les observacions en bins (hi ha categories amb poques dades!) i amb la distribució hipotètica calculem quants de cotxes esperaríem en cada bin,



Hi	0	1	2	3	4	≥5
Oi	8	21	24	22	12	13
Ei	7.8	19.9	25.4	21.6	13.8	11.5

que ens dóna un valor $\chi_o^2 = 0.581$, amb 4 graus de llibertat. De la Taula II es veu que aquest valor és inferior al primer que es dona a la quarta filera, de manera que té una probabilitat de trobar-se superior a 0.2 i no hi ha motiu (al menys des del punt de vista del test χ^2) per a dubtar de la validesa de la nostra hipòtesi.

d2. Llencem un dau 126 vegades, i cada cara surt el nombre de vegades indicat a la taula. Hi ha motiu per a pensar que el dau és trucat?

Cara	A	K	Q	J	V	N
Oi	23	16	12	27	22	26

A primera vista, sembla que la Q surt poques vegades, de manera que podríem sospitar que el dau és trucat. Formulem la hipòtesi nul·la “El dau no és trucat”, que és equivalent a dir “Cada cara té probabilitat 1/6 d’aparèixer”, i ens demanem si les nostres dades són compatibles amb aquesta hipòtesi. Amb aquesta hipòtesi, esperem que en fer N llançaments cada cara aparegui un nombre de vegades $E_i = N \cdot p = 126/6 = 21$ vegades, de manera que tenim

Cara	A	K	Q	J	V	N
Oi	23	16	12	27	22	26
Ei	21	21	21	21	21	21

Això ens dóna un valor $\chi_o^2 = 8.19$, amb 5 graus de llibertat (fixeu-vos que no hem ajustat cap paràmetre!). De la Taula II, la probabilitat de trobar un valor de χ^2 tan gran o més que aquest és superior a 0.1 (de fet, és 0.145), de manera que no hi ha raó per a pensar que el dau sigui trucat, és a dir, acceptem la hipòtesi nul·la.

d3. Llencem una moneda 30 vegades, i trobem que surt cara 20 vegades, i creu 10. Hi ha motiu per a pensar que la moneda és trucada?

Si la moneda no és trucada (hipòtesi nul·la), la probabilitat de treure cara o creu és la mateixa, $p = 1/2$. En llançar-la 30 vegades, esperem treure 15 vegades cara i 15 creu, és a dir, tenim

	Cara	Creu
Oi	20	10
Ei	15	15

de manera que resulta $\chi_o^2 = 3.33$, amb un grau de llibertat. De la Taula II veiem que la probabilitat d’obtenir aquest valor o major és entre 0.1 i 0.05, per la qual cosa podem dubtar de la hipòtesi nul·la, però el resultat no és conclusiu i caldria fer més mesures.

5. Comparació i combinació de mesures. Propagació d'errors.

a. Comparació de mesures.

El procés anterior ens permet fer una estimació dels paràmetres de la distribució de les dades, a partir del qual podem donar el “valor” de la magnitud que estudiem i de la incertesa corresponent. Per exemple, per a una gaussiana donarem com a valor de la magnitud M la nostra estimació de la mitjana, m , amb una incertesa s/\sqrt{N} , on s és la nostra estimació de la desviació típica, és a dir, $M = m \pm s/\sqrt{N}$.

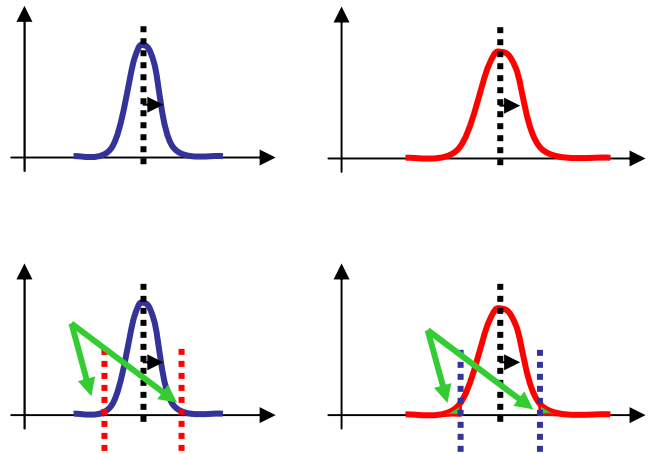
Quan una altra persona faci la mateixa mesura, en general trobarà un resultat diferent del nostre, $M = m' \pm s'/\sqrt{N'}$. Una qüestió òbvia és “Quin resultat és el bo?”, però si tenim en compte que en tota mesura existiran fluctuacions, podria ser que tots dos fossin correctes. Per tant, la pregunta que cal formular-se és si els dos resultats són compatibles entre ells o no, en el sentit de que corresponguin a la mateixa distribució subjacent.

Per respondre a aquesta pregunta, fixem-nos que segons les nostres observacions i en aplicació del Teorema del Límit Central, la mitjana té una distribució gaussiana de desviació típica s/\sqrt{N} al voltant del valor mitjà m . Segons l'altre experimentador, la mitjana és m' , i si definim la *discrepància* com $D = |m - m'|$, ens podem demanar: “Quina és la probabilitat de que si jo repeteixo l'experiment trobi una mitjana que discrepi del valor m en una quantitat major o igual que D ?”. Aquesta probabilitat és

$$P = \int_{-\infty}^{m-D} dx G\left(x; m, \frac{s}{\sqrt{N}}\right) + \int_{m+D}^{+\infty} dx G\left(x; m, \frac{s}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \int_{m-D}^{m+D} dx G\left(x; m, \frac{s}{\sqrt{N}}\right)$$

i si és igual o major que 0.1, es considera que els dos resultats són compatibles i es diu que la discrepància no és significativa, ja que el 10% dels experiments donarien resultats que tinguessin una discrepància igual o superior a la trobada. En canvi, si P és inferior al 0.01, es considera que els resultats no són compatibles i que la discrepància és altament significativa.

Òbviament, podem fer el mateix amb la distribució determinada per l'altre observador, i ens donarà un resultat P' diferent perquè les estimacions fetes per l'altre observador dels paràmetres de la distribució subjacent són diferents. Si les desviacions típiques de les mitjanes m i $m' - s/\sqrt{N}$ i $s'/\sqrt{N'}$, respectivament, són semblants, el criteri aplicarà igualment en qualsevol dels dos casos. En canvi, si són prou diferents ens podem trobar que quan usem el resultat de major desviació típica (és a



dir, el més imprecís) els resultats siguin compatibles, però que no ho siguin en el cas contrari (vegeu Figura 12). Això vol dir que l'observador que ha obtingut resultats més imprecisos no pot discriminar gaire, mentre que el més precís sí que ho pot fer. D'aquí la importància de procurar ser precisos i tenir incerteses petites.

b. Combinació de mesures.

Si els resultats de diferents mesures són compatibles entre ells, una segona pregunta que ens podem fer és: "Podem combinar les diferents mesures per a tenir un coneixement més precís del valor de la magnitud M ?". El principi de màxima versemblança ens dóna la resposta: Si K experimentadors han determinat cadascun un valor de la variable $M = m_i \pm s_i \sqrt{N_i} \equiv m_i \pm \delta m_i$, aleshores podem combinar-les per a tenir una millor estimació $M = m \pm \delta m$ donada per

$$m = \frac{\sum_{i=1}^K w_i m_i}{\sum_{i=1}^K w_i} \quad \delta m = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^K w_i}} \quad w_i = \frac{1}{\delta m_i^2}$$

Com podeu veure, això equival a fer la mitjana de les mesures amb un pes donat per l'invers de les variances de cada mesura; és a dir, comptem més els resultats més precisos, que també contribueixen més a l'hora de determinar la incertesa del resultat.

c. Mesures indirectes i propagació d'errors.

c1. Funcions d'una única variable

Sovint, el valor de la magnitud M que mesurem no correspon directament al resultat que cerquem, sinó que cal transformar-lo per a arribar-hi. Per exemple, si volem determinar l'àrea A d'un quadrat, ho podem fer mesurant la longitud L del costat i aplicant la relació $A = L^2$. Clarament, en mesurar L tenim que qualsevol incertesa en son valor es *propagarà* al valor d' A , limitant-ne el nostre coneixement. Això és així independentment de que la incertesa en L sigui d'origen instrumental (és a dir, que no tinguem fluctuacions en la lectura sinó que sigui la resolució de l'aparell la que ens limita) o estadístic.

Suposem que hem determinat que $L = L_0 \pm \delta L$, on la incertesa en L és de caràcter estadístic, i prou petita. Això vol dir que les dades estan bastant agrupades al voltant del valor L_0 . Per tant, una funció qualsevol d' L , $f(L)$, podem expandir-la en sèrie d'En Taylor al voltant del valor L_0 ,

$$f(L) = f(L_0 + (L - L_0)) = f(L_0) + f'(L_0) \times (L - L_0) + \dots$$

Així, si L és aleatòria, $f(L)$ també ho és: el valor esperat de la funció és $f(L_0)$, i la variança de la funció és $f'(L_0)^2 \cdot \sigma_L^2$, de manera que donarem el valor i incertesa de la funció com

$$F = f(L_0) \pm |f'(L_0)| \times \delta L$$

En el cas del quadrat, l'àrea $A = f(L) = L^2$. Si $L = (1.00 \pm 0.05)$ cm, aleshores tenim que l'àrea és $A = (1.0 \pm 0.1)$ cm².

Si la incertesa és de caràcter instrumental, podem aplicar el mateix raonament per a determinar la incertesa.

c2. Múltiples variables

En aquests casos, el resultat cercat és una combinació –coneguda en forma de funció– de diferents variables $M_i = m_i \pm \delta m_i$ que hem determinat per separat, i que cal combinar per arribar a la resposta desitjada. En principi, podem procedir com abans, desenvolupant la funció en sèrie d'En Taylor al voltant del valor central de cada variable,

$$f(M_1, \dots, M_K) = f(m_1 + (M_1 - m_1), \dots, m_K + (M_K - m_K)) = f(m_1, \dots, m_K) + \sum_{i=1}^K \frac{\partial f}{\partial M_i} \times (M_i - m_i) + \dots$$

El valor esperat de la funció és $f(m_1, \dots, m_K)$, i la variança és donada per

$$\sigma_f^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K \frac{\partial f}{\partial M_i} \frac{\partial f}{\partial M_j} \times (M_i - m_i) \times (M_j - m_j)$$

Si les variables M_i són *estadísticament independents*¹, els termes amb $i \neq j$ es cancel·len perquè els signes i valors d'un i altre factors no tenen res a veure, i ens queda simplement

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \times (M_i - m_i)^2 = \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial M_i} \right)^2 \times \delta m_i^2$$

que ens determina la incertesa de la magnitud cercada en funció de les de cada variable mesurada.

Per exemple, el volum d'un cilindre recte d'alçada H i base de radi R és donat per la relació $V = \pi R^2 H$. Si hem determinat que $R = (2.00 \pm 0.05)$ cm i $H = (4.00 \pm 0.05)$ cm, la incertesa en el volum és

$$\sigma_V^2 = (2\pi R H)^2 \times \sigma_R^2 + (\pi R^2)^2 \times \sigma_H^2 + (R^2 H)^2 \times \sigma_\pi^2$$

on la incertesa en π dependrà del nombre de xifres significatives que en prenguem; si el prenem amb prou precisió (per exemple, $\pi = 3.14159265$), no influirà en la incertesa en el volum, i en aquest cas tenim $V = 50.568452$ cm³, amb $\sigma_V = 2.5906$ cm³. Aplicant les regles d'arrodoniment, tenim per tant $V = (50.6 \pm 2.6)$ cm³.

c3. Incerteses instrumentals

Quan usem instruments poc precisos, sovint trobem que les mesures no tenen dispersió estadística, perquè aquesta és menor que l'error instrumental. En aquests casos, podem encara usar les fórmules anteriors prenent com a incertesa l'error instrumental, però convindrà indicar-ho clarament per a distingir els dos casos i evitar males interpretacions. De qualsevol manera, cal notar que en aquest cas és molt més difícil estar segur de que les diferents variables no tenen correlació, i que les fluctuacions en una són

¹ El concepte de variables estadísticament dependents i independents es discutirà a continuació, i juga un paper crucial en l'establiment de lligams i relacions entre variables, és a dir, en la formulació de "lleis" existents entre elles.

independents de les fluctuacions en les altres. El millor que podem fer, si cal i és possible, és cercar un instrument de major resolució.

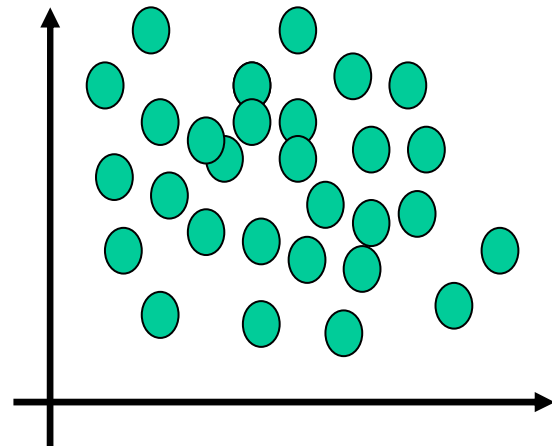
6. Dependència estadística. Correlació i dependència mútua.

Com hem discutit a la introducció, un dels aspectes fonamentals del treball científic és entendre un determinat fenomen, arribant si és possible a determinar les lleis que el governen i inscriure-les en el marc d'una teoria. Qualsevol fenomen està caracteritzat per una sèrie de variables (*variables dependents*), i volem saber com canvia en modificar les condicions en què es produeix, les quals suposem que són descrites per un altre conjunt de variables anomenades *independents* o de *control*. Per a això, fem observacions de les variables dependents controlant els valors de les variables que considerem independents, i provem de determinar si en canviar aquestes les primeres es modifiquen i com. En un experiment al laboratori, solem tenir capacitat de fixar externament el valor de les variables de control per analitzar quin impacte tenen sobre les dependents, però en experiments de camp, sovint tenim només capacitat observacional, sense possibilitat de manipulació de les variables independents, i això complica les coses.

a. Variables estadísticament independents.

Habitualment, considerem que dues coses (variables) són independents quan el que li passa a una no afecta el que li passa a l'altra. En canvi, diem que l'una depèn de l'altra si en canviar la segona es provoca també un canvi a la primera. Des del punt de vista estadístic, i degut a la presència de les fluctuacions, usem el mateix concepte però aplicat a la probabilitat o distribució de probabilitat, segons que tractem variables discretes o contínues.

Considerem el cas on llancem dos daus, un de color vermell i un de color blau. Els daus no són trucats, i cada cara de cadascun dels daus té una probabilitat $1/6$ d'aparèixer, cosa que hem comprovat prèviament llançant cadascun d'ells i fent-ne, per exemple, el test χ^2 . Si ara fem múltiples llançaments dels dos daus simultàniament i anotem el resultat obtingut amb cadascun d'ells, tenim una col·lecció de dades $\{(V_1, B_1), \dots, (V_N, B_N)\}$ com les mostrades a la Figura 13 de les que en podem fer l'histograma (en aquest cas, amb bins bidimensionals), que en el límit ens dona la probabilitat d'un cert resultat $P(V, B)$, el que s'anomena la



probabilitat conjunta de les dues variables. Si ara ens fixem només en els resultats on el dau blau ha tret un cert resultat, R , podem construir la *probabilitat condicionada* del dau vermell al resultat R del blau, $P(V | B=R)$. Si $P(V | B=R)$ és independent del valor R triat (i per tant, igual a la probabilitat $P(V)$ del dau vermell sol), el resultat del dau vermell no té cap relació amb el del dau blau, i aleshores diem que les dues variables són *estadísticament independents*. En aquest cas, $P(V, B) = P(V) P(B)$.

Si la probabilitat del resultat al dau vermell es veïés afectada pel que sortís al dau blau, la probabilitat conjunta no seria el producte de les probabilitats i diríem que les variables no són independents. Cercariem aleshores quina relació hi ha entre elles, és a dir, com el resultat del dau blau afecta la probabilitat del resultat al dau vermell, determinant així la llei que els relaciona, la qual s'hauria de formular en termes matemàtics per a poder, d'una banda arribar a tenir valor predictiu, i de l'altre, a integrar-se en un marc general teòric per a explicar-la.

b. Correlació lineal.

En un experiment, sigui al laboratori o de camp, la primera tasca és determinar si una de les hipotètiques variables de control (X) afecta o no una variable dependent (Y). Si es tracta d'un experiment al laboratori, fixem amb bona precisió un valor d'X, X_i , i fem un conjunt de mesures d'Y, $\{Y_{i1}, \dots, Y_{iN}\}$, que tenen dispersió apreciable; aleshores canviem el valor d'X i repetim el procés tantes de vegades com calgui per a poder veure bé qualsevol possible dependència. Si dibuixem les dades en un gràfic, podem tenir una situació semblant a la mostrada a la Figura 14. Aquesta representació gràfica ja ens sol donar una primera informació, malgrat que qualitativa, sobre si hi ha possibles dependències o no. A la Figura 14, per exemple, sembla que els valors d'Y disminueixen quan creix X, i que ho fan d'una manera que podria ser lineal... En canvi, una situació com la de la Figura 13 semblaria indicar que els canvis en la variable X no afecten els valors obtinguts de la variable Y, puix el núvol de punts sembla homogeni.

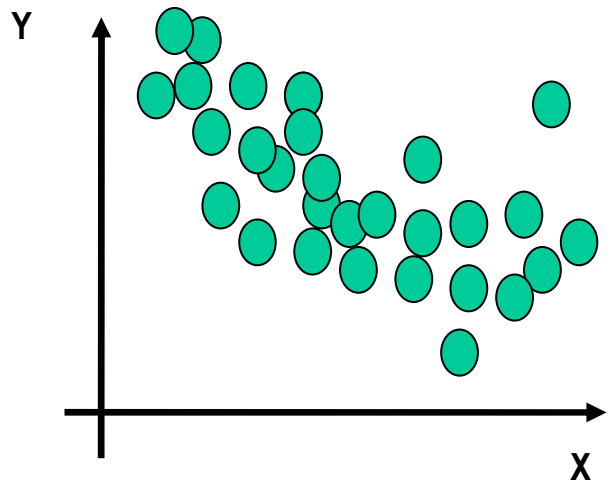


Figura 14

Podem quantificar aquesta relació entre dues variables X, Y de moltes de maneres, essent una de les més usades l'anomenat *coeficient de correlació lineal* d'En Pearson. Si tenim una col·lecció de dades aparellades per a X i Y, $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)\}$, el coeficient de correlació lineal es defineix com

$$r_o = \frac{1}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{s_x s_y}$$

on m_x i s_x (m_y i s_y) són les nostres estimacions de la mitjana i la desviació típica de la variable X (Y), fetes a partir de les dades.

Fixeu-vos que si entre les variables X i Y existeix una relació $Y = A + B X$, aleshores la dispersió en Y és deguda només a la dispersió que pugui haver-hi en X. Per a aquesta casta de relació, tenim

$$\left. \begin{aligned} m_y &= A + Bm_x \\ s_y^2 &= B^2 s_x^2 \\ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)(y_i - m_y) &= B s_x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \pm 1$$

En general, la dispersió en Y té altres contribucions, i aleshores tindrem $|r| < 1$. Això ens posa un problema: si les variables no tenen cap relació entre elles, però fem un nombre finit de mesures, podríem trobar un valor de $|r|$ semblant a 1 per pura casualitat o per un error nostre: per exemple, si només fem dues mesures per a dues variables independents, *segur* que trobarem $|r|=1$, ja que dos punts defineixen una recta!

L'aparent relació podria, doncs, ser fortuïta i aparèixer per atzar malgrat ser les variables estadísticament independents. Per a resoldre aquesta qüestió podem recórrer a la hipòtesi nul·la "Les variables són estadísticament independents i el coeficient de correlació lineal trobat és per atzar". Amb aquesta hipòtesi, podem avaluar la probabilitat $P(r \geq r_0)$ de trobar un coeficient de correlació $r \geq r_0$, amb N parelles de dues variables independents: com sempre, si $P(r \geq r_0) > 0.1$ acceptem la hipòtesi nul·la i hem de concloure que les dues variables són independents; en canvi, si $P(r \geq r_0) < 0.05$ diem que les dues variables tenen correlació lineal significativa, i que és altament significativa si $P(r \geq r_0) < 0.01$. Els dos darrers casos ens indiquen que molt probablement hi ha dependència entre les dues variables que estem manejant.

P \ N	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30
0.2	0.952	0.800	0.687	0.608	0.551	0.507	0.472	0.443	0.351	0.299	0.241
0.1	0.988	0.900	0.805	0.729	0.669	0.621	0.582	0.549	0.441	0.378	0.306
0.05	0.997	0.950	0.878	0.811	0.754	0.707	0.666	0.632	0.514	0.444	0.361
0.01	1.000	0.990	0.959	0.917	0.875	0.834	0.798	0.765	0.641	0.561	0.463

Taula III: Valors absoluts del coeficient de correlació r_0 que donen, per a N parelles de dues variables gaussianes independents, la probabilitat $P(r \geq r_0)$ especificada a la primera columna.

La Taula III ens dóna, per a diferents nombres de parelles de valors de dues variables gaussianes independents, els valors absoluts del coeficient de correlació lineal, r_0 , per al qual tenim el valor de $P(r \geq r_0)$ especificat a la primera columna. Noteu que aquesta probabilitat depèn molt fortament del nombre de parelles de valors, N. Per un nivell donat de probabilitat, el valor r_0 disminueix a mesura que augmenta el nombre de parelles, expressant que en el límit d'un nombre infinit de mesures no trobaríem cap correlació entre les variables. D'una altra banda, per un nombre fixat de mesures veiem que el valor de la probabilitat disminueix a mesura que augmenta r_0 , expressant que hem de tenir molta de sort per a trobar correlacions molt elevades a partir de variables independents.

Això vol dir que el valor r_0 no és indicatiu per sí mateix de la correlació existent, sinó que hem de tenir en compte el nombre de parelles que hem considerat. Per exemple, si ob-

tenim un valor $r_0 = 0.81$ amb $N = 5$, aquesta correlació no és significativa, ja que $P(r \geq r_0)$ és entre 0.1 i 0.2; en canvi, aquest mateix valor amb $N > 8$ indica correlació significativa o molt significativa. Aquesta és una altra raó per a no limitar el nombre de mesures: quantes més en tinguem, més improbable serà trobar una correlació per atzar.

Aquest és un resultat molt important: si rebutgem la hipòtesi nul·la, vol dir que la variable que considerem independent modifica la dependent, i per tant que hi ha una relació entre elles, cosa que pot ser interessant d'entendre i explicar, i que eventualment pot tenir utilitat pràctica. La relació, aleshores, pot adquirir un sentit físic i tecnològic, expressant una llei que podem emmarcar en una teoria més àmplia.

c. Correlació lineal i ajustament de funcions a dades.

c1. La recta de regressió: ajust lineal directe

Quan entre dues variables X i Y trobem una correlació lineal significativa, ens indica que, excepte efectes de fluctuacions, la variable Y probablement depèn de la variable X de manera lineal, és a dir, de la forma $Y = A + B X$. El Principi de Màxima Versemblança ens permet fer una estimació dels paràmetres A i B de la recta a partir de les nostres dades,

$$\hat{A} = \frac{\langle x^2 \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\langle xy \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i$$

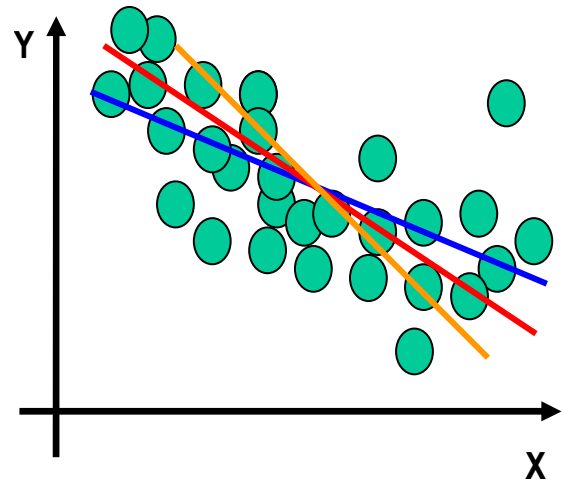


Figura 15

Aquesta recta passa pel centre de gravetat del núvol de punts (línia vermella de la Figura 15), i deixa tants de punts per damunt com per davall, de manera que minimitza la suma de distàncies de cada punt a la recta, per això sovint se l'anomena *l'ajust per mínims quadrats*. El valor d'A s'anomena l'ordenada a l'origen, i correspon al valor de la variable dependent (Y) quan la independent (X) s'anul·la. El valor de B, en canvi, ens dóna com canvia el valor d'Y quan canviem el d'X, i s'anomena el pendent de la recta.

Ara bé, en fer l'ajust, també tenim incerteses: a la figura es veu que les línies groga o blava també podrien ser acceptables, posant clarament de manifest que tenim incertesa en els valors d'A i B. Una primera estimació d'aquestes incerteses la podem fer amb la distància característica entre els punts i la recta de regressió,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{A} - \hat{B}x_i)^2$$

El denominador $N-2$ ve del fet que hem perdut dos graus de llibertat en estimar els coeficients d'ajust. Així, les incerteses en els paràmetres d'ajust es poden estimar com

$$\delta A = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \frac{\delta}{\sqrt{N}} \quad \delta B = \frac{\delta}{\sqrt{N(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}}$$

Una conseqüència important és que això ens dona un instrument per a detectar en alguns casos errors sistemàtics en el nostre experiment. Si *sabem* que quan X és nul·la Y també ha de ser-ho (per exemple, l'allargament d'una molla és zero quan no s'hi penja cap pes addicional), aleshores una potencial recta de regressió entre l'allargament i el pes suspès ha de passar per l'origen, i això vol dir que la nostra estimació d' A ha de ser del mateix ordre que la incertesa. Si no és així, hi ha qualche error a l'experiment o a l'anàlisi de les dades.

c2. La recta de regressió: ajust amb pesos

Si tenim prou dades per a cada valor de la variable independent, X , encara podem anar més lluny i fer una millor estimació tant dels paràmetres com de llurs incerteses.

Suposem que la variable Y té, fixat el valor x_i de la variable independent, una distribució gaussiana de mitjana μ_i i desviació típica σ_i , i que la variable X no té error apreciable. Fixat x_i , recollim N_i valors d' Y i fem una estimació d'aquests paràmetres, de manera que podem resumir les N_i dades dient que tenim $y_i = m_i \pm s_i / \sqrt{N_i} \equiv m_i \pm \delta_i$. Ara, el Principi de Màxima Versemblança ens diu que la millor estimació dels paràmetres de la recta de regressió és

$$A = \frac{\langle x^2 \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle xy \rangle}{\Delta} \quad B = \frac{\langle xy \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle}{\Delta}$$

$$\Delta = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \langle q \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N w_i q_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad w_i = \frac{1}{\delta_i^2}$$

que és gairebé idèntic al que havíem vist abans, amb l'excepció que ara les mitjanes es calculen amb un pes per a cada punt donat per w_i , que ens diu si el punt considerat és o no molt precís¹. En aquest cas, a més, la incertesa en els paràmetres de la recta de regressió és donada per

$$\delta A = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\Delta}} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_i}} \quad \delta B = \frac{1}{\sqrt{\Delta \sum_{i=1}^N w_i}}$$

Fixeu-vos que si tots els punts mesurats tenen la mateixa precisió, aquests resultats es redueixen al cas anterior.

¹ Una altra diferència és que ara, N és el nombre de valors presos per a X , i no el nombre total de parelles de valors.

c3. Ajustaments a altres corbes

En general, les relacions entre les variables no són de tipus lineal, i ens convindria tenir una eina que ens permetés fer ajustaments en aquests casos.

Si tenim una idea prèvia de quina pot ser la relació, el primer que podem fer és veure si hi ha cap *canvi de variables* que ens permeti linealitzar-la. Per exemple, si esperem una relació del tipus $Y = A \exp(-B X)$, el canvi de variable $Z = \ln Y$ ens permet expressar-la com $Z = \ln A - B X = A' + B' X$, i la relació esdevé lineal, amb uns nous coeficients que són una transformació dels originals. Igualment, si la relació esperada és del tipus $Y = A + B X^\alpha$, podem fer $Z = X^\alpha$ i obtenim $Y = A + B Z$, també lineal, o bé si $Y = A/(1 + B X^\alpha)$, podem linealitzar-la definint $Z = 1/(1 + B X^\alpha)$, etc. En tots aquests casos, podem usar l'ajust lineal en les noves variables, i després desfer els canvis per a trobar la relació entre les variables originals¹.

Ara bé, què podem fer si no és possible trobar una forma de linealitzar la relació? En aquest cas, podem aplicar el Principi de Màxima Versemblança per a fer una determinació dels coeficients. Si pensem que la relació entre Y i X és de la forma $y = f(x; a_1, \dots, a_M)$, amb M paràmetres que cal determinar, definim la magnitud

$$S = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2$$

que representa la suma dels quadrats de les desviacions entre els valors mesurat i esperat (mesurat en desviacions típiques). Per a triar els valors dels paràmetres, minimitzem S respecte de cadascun d'ells, és a dir, fem

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \forall k = 1, \dots, M$$

i tenim un sistema d' M equacions amb M incògnites la solució del qual ens determina els valors dels paràmetres. Les incerteses les podem estimar a partir de la dispersió dels punts i usant la propagació d'errors.

En el cas que no tenim prou mesures per a determinar les variàncies de cadascun dels punts, es sol usar el *mètode dels mínims quadrats*. Aquest consisteix en suposar que la variància de la distribució d' y és igual a tots els punts, de manera que σ_i factoritza i desapareix en fer la minimització.

c4. El test χ^2 de l'ajustament lineal

Malgrat ser extremadament útil, la correlació lineal que hem vist a les seccions anteriors resulta no ser un indicador prou fi: gairebé sempre que hi hagi una dependència entre les variables obtindrem r_0 significatiu encara que la relació entre les variables sigui no lineal, tal i com es mostra a la Figura 16. Si fem la correlació lineal d'aquestes dades, la relació entre els quals és $Y = X^{1/2}$, trobem $r_0=0.968$. Per a 20 parells de dades indepen-

¹ En canviar de variables, les incerteses també canvien segons les regles de propagació d'errors que hem vistes abans, i sol ser convenient tenir-ho en compte per a fer la mitjana pesant els punts.

dents, tenim $P(r \geq 0.968) < 0.1\%$, de manera que la correlació lineal ens sembla altament significativa malgrat no existir una relació lineal entre les dades. Clarament, la raó és que sobre un interval petit, qualsevol funció es pot aproximar per una recta.

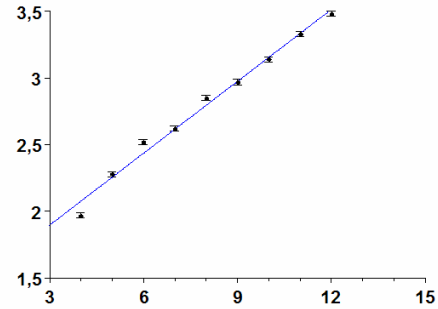


Figura 16

Això vol dir que podríem pensar que la relació entre dues variables és lineal i estar cometent un error que pot arribar a ser greu. El test χ^2 de l'ajustament lineal ens permet detectar aquesta casta de situacions amb molta més cura. Si tenim un conjunt de punts $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)\}$, que hem ajustat per la recta $Y = A + B X$, podem calcular

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - A - Bx_i}{\sigma_i} \right)^2$$

que representa la desviació al quadrat dels punts respecte de la recta de regressió en unitats de la incertesa de cada punt. El nombre de graus de llibertat que tenim és $N - 2$ si les incerteses de cada punt no es calculen de la dispersió del núvol de punts, mentre que és $N - 3$ en cas contrari. Novament, amb l'ajut de la Taula III podem analitzar la probabilitat de que de dues

variables independents obtinguem un valor de χ^2 tan gran o més que el valor trobat. Si aquesta probabilitat és superior a 0.1, no tenim motiu per a sospitar que l'ajust no és compatible amb les nostres dades, mentre que si és inferior a 0.01, tenim una discrepància altament significativa. La interpretació gràfica d'aquest resultat la teniu a la Figura 17:

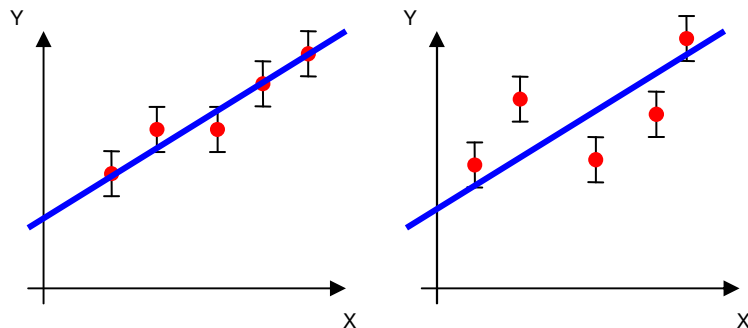
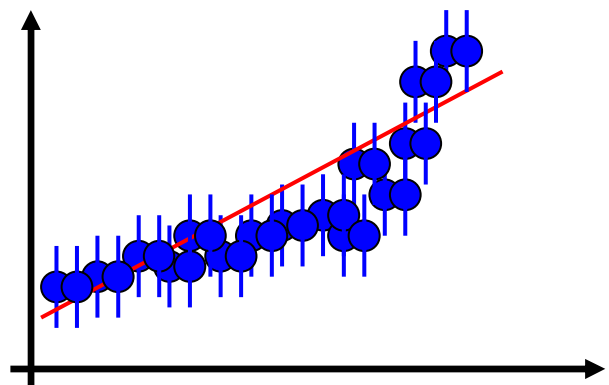


Figura 17

si la recta de regressió passa tocant les barres d'error de cadascun dels punts, és gairebé segur que no trobarem discrepància significativa (esquerra) mentre que si no és així, podem tenir discrepància significativa.

Ara bé, això ens posa de manifest que el test χ^2 és sensible a les incerteses de cada punt. Per tant, quan tinguem discrepància significativa amb l'ajust pot ser degut a dues causes: o bé les incerteses dels punts han estat preses més petites del que realment són, o bé l'ajust és dolent. Igualment, si no tenim discrepància significativa pot ser que realment l'ajust



sigui bo, o que haguem sobreestimat les incerteses de cada punt. Per exemple, la Figura 18 mostra una situació on, amb 30 punts, fem l'ajust a una recta i trobem un valor de χ^2 igual a 30, que té una probabilitat $P_{28}(\chi^2 \geq 30)$ del 40%, pel que sembla absolutament acceptable. Però si ens fixem en el gràfic, veiem immediatament que els punts mesurats no es distribueixen aleatòriament per damunt i per davall de la recta ajustada, sinó que hi ha una primera zona on tots són per damunt, una zona intermèdia on tots són per davall, i una darrera zona on tots són novament per damunt de l'ajust. Aquesta característica ens indica que, malgrat el bon resultat del test χ^2 , l'ajust no és correcte: si l'ajust fos el bo, degut al renou esperarem trobar els punts aleatòriament per damunt o per davall de la funció ajustada, i és molt improbable que hi hagi seqüències llargues de punts consecutius per damunt o davall. S'han desenvolupat tests per a resoldre aquesta qüestió de manera més quantitativa (*test de seqüències*, etc.), però no els tractarem aquí; si els necessiteu, podeu recórrer a la bibliografia.

d. Exemples.

d1. Es mesura la resistència elèctrica d'un cert material en funció de la temperatura, la qual es fixa amb una precisió de 0.01 K. Els resultats són els de la taula adjunta,

T (K)	275.00	300.00	325.00	350.00	375.00	400.00
R (k Ω)	22.7 \pm 0.3	31.5 \pm 0.5	39.8 \pm 0.5	48.2 \pm 0.5	58.0 \pm 1.0	68.0 \pm 1.0

Sembla clar que la resistència elèctrica del material varia en funció de la temperatura. Per a ser-ne més segurs, calculem el coeficient de correlació lineal de les dades, i trobem $r_0 = 0.99923$. Fem la hipòtesi nul·la: "Les variables no tenen correlació, i el valor r_0 trobat és per atzar". De la Taula III, i mirant la columna corresponent a 6 parelles de dades, veiem que aquest valor és superior al darrer que ens donen: això vol dir que la probabilitat de tenir aquest valor r_0 és inferior a 0.01, de manera que rebutgem la hipòtesi nul·la i diem que les dues variables tenen correlació lineal altament significativa.

Aleshores, fem la hipòtesi: "H: R depèn linealment de T", i fem l'ajust lineal de la forma $R = A + B \cdot T$. Per a fer-ho, usem els pesos de cada punt donats per l'invers de l'error, ja que no tenen tots ells la mateixa incertesa. Trobem $A = (-73.7 \pm 1.7)$ k Ω , i $B = (0.350 \pm 0.006)$ k Ω /K. Per a contrastar la nostra hipòtesi, fem el test χ^2 del nostre ajust, i trobem $\chi^2_0 = 5.131$, amb 4 graus de llibertat. De la Taula II, veiem que aquest valor és inferior al primer donat, el que significa que trobar un valor tan gran o més que 5.131 té una probabilitat superior a 0.2, i per tant no tenim en principi motiu per a descartar la hipòtesi H a partir del test χ^2 .

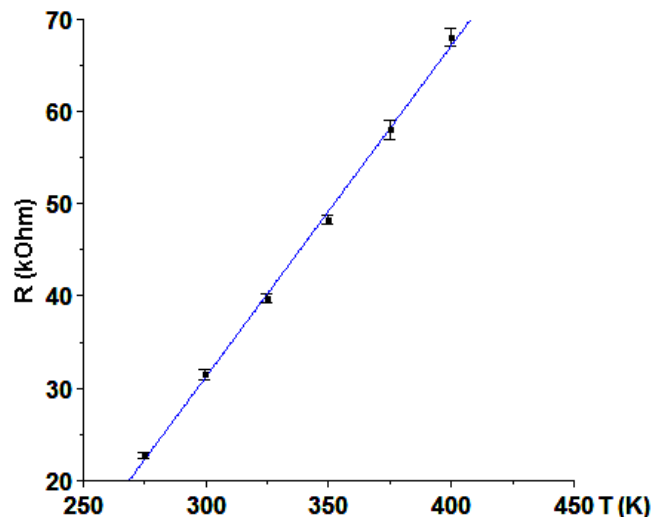


Figura 19

Finalment, dibuixem en un mateix gràfic els punts experimentals i la recta de regressió que acabem de determinar. Com es pot veure a la Figura 19, la funció ajustada (línia blava) passa bé per dins de les barres d'error de cadascun dels punts experimentals, el que explica el bon resultat del test χ^2 . A més, veiem que els punts semblen estar distribuïts aleatòriament per damunt i per davall de la línia blava, sense indicació clara de cap tendència sistemàtica. Per tant, acceptem la hipòtesi H.

Ara que hem feta una hipòtesi sobre la dependència de la resistència amb la temperatura, tenim capacitat predictiva. Si aquesta dependència és correcta, podem predir el valor de la resistència a una temperatura donada. Per exemple, quan tenim $T = 450$ K, la resistència hauria de ser $R = A + B \cdot T = 83.8$ k Ω , amb una incertesa (determinada per propagació d'errors) de 2.8 k Ω . Podem fàcilment mesurar-la, i comprovar si la nostra predicció s'avé o no amb l'experiment, contrastant així una vegada més la nostra hipòtesi.

d2. La quantitat de desintegracions radioactives d'una mostra que es produeixen durant un lapse de 15 s es mesuren repetidament, a intervals de 10 minuts. El temps de preparació de la primera mesura és també de 10 minuts, i trobem els següents resultats

t (min)	10	20	30	40	50
Comptes en 15 s	409	304	260	192	170

Sembla clar que el nombre de comptes disminueix amb el temps, de manera que calculem el coeficient de correlació lineal de les dades, i trobem $r_o = -0.9728$. Fem la hipòtesi nul·la: "Les variables no tenen correlació, i el valor r_o trobat és per atzar". De la Taula III, i mirant la columna corresponent a 5 parelles de dades, veiem que aquest valor és major que el darrer que ens donen, de manera que amb 5 parelles de dues variables independents, la probabilitat de tenir un coeficient de correlació igual o major que aquest valor r_o és inferior a 0.01. Per tant, rebutgem la hipòtesi nul·la i diem que les dues variables tenen una correlació lineal altament significativa.

Aleshores, fem la hipòtesi: "H1: El nombre de comptes depèn linealment del temps", i fem l'ajust lineal de la forma $N = A + B \cdot t$. Per a fer-ho, usem els pesos de cada punt donats per l'arrel quadrada del nombre de comptes. Trobem uns coeficients d'ajust $A = (433 \pm 19)$ comptes, i $B = (-5.6 \pm 0.5)$ comptes \cdot min $^{-1}$. Per a contrastar la nostra hipòtesi, fem el test χ^2 del nostre ajust, i trobem $\chi^2_o = 6.745$, amb 3 graus de llibertat. De la Taula II, veiem que la probabilitat de trobar un valor tan gran o més que aquest és inferior a 0.1, la qual cosa ens fa sospitar que l'ajust no és prou

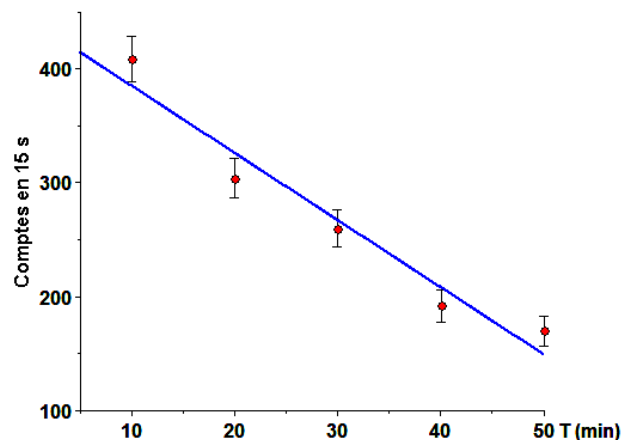


Figura 20

bo. De fet, si dibuixem els punts experimentals i la recta de regressió (Figura 20) trobem que els tres punts centrals són per davall de la recta, mentre que els dos extrems són per damunt, cosa que ens fa sospitar que l'ajust per una recta no és acurat, és a dir, que la hipòtesi H1 no és correcta. En aquesta situació, tenim dues opcions: o bé fem més mesures per augmentar el nombre de graus de llibertat i tenir més capacitat de decisió, o bé formulem una altra hipòtesi. Per exemple, podem provar de fer la hipòtesi "H2: el nombre de desintegracions decreix exponencialment en el temps". Aquesta hipòtesi es pot linealitzar fent el canvi de variable $z = \ln N$, que ens dona $z = A + B \cdot t$, on $A = \ln N_0$ i $B = -1/\tau$. Aquest canvi, però, ens diu que $\delta z = (1/N) \delta N = 1/\sqrt{N}$, de manera que tenim

t (min)	10	20	30	40	50
z	6.01 ± 0.05	5.71 ± 0.06	5.51 ± 0.06	5.26 ± 0.07	5.14 ± 0.08

Ara, el coeficient de correlació lineal que trobem és $r_0 = -0.9923$, que té $P(r \geq r_0) < 0.01$. Repetim l'ajust, i trobem $A = 6.21 \pm 0.06$ i $B = (-0.023 \pm 0.002) \text{ min}^{-1}$, pel que tenim $\chi^2_0 = 2.026$, amb 3 graus de llibertat. De la Taula II tenim que la probabilitat de trobar un valor igual o superior a aquest és superior a 0.2, de manera que sembla prou bo. La representació gràfica dels punts mesurats i l'ajust ens confirma aquesta impressió (Figura 21), pel que acceptem la segona hipòtesi, H2.

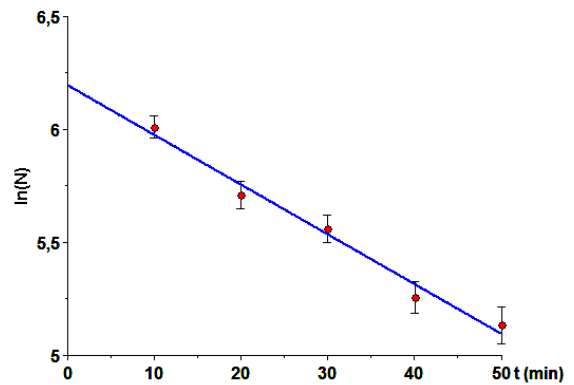


Figura 21

d3. Volem mesurar l'acceleració gravitatòria al nostre laboratori, i decidim fer-ho aprofitant el que ens ha explicat el professor de Física sobre el pèndol simple. El fonament teòric de la mesura és que l'equació de moviment d'una massa M suspesa a distància l d'un punt fix P dins un camp gravitatori constant g (vegeu Figura 22) és

$$ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \approx -mg \theta$$

si els angles són prou petits. La solució d'aquesta equació és un moviment oscil·latori, de període d'oscil·lació T donat per

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Construïm per tant un pèndol amb una vareta d'acer de longitud $L = (1000 \pm 1) \text{ mm}$, diàmetre $D = (5.0 \pm 0.1) \text{ mm}$ i massa $M = (200 \pm 1) \text{ gr}$, un extrem de la qual té un rodament que li permet girar lliurement amb molt poca fricció. Construïm un pes cilíndric –radi $R = (15.0 \pm 0.1) \text{ mm}$, alçada $h = (100.0 \pm 0.1) \text{ mm}$ i massa $m = (1000 \pm 1) \text{ gr}$ – al qual fem un forat ben centrat de diàmetre $D' = (5.1 \pm 0.1) \text{ mm}$, de manera que es

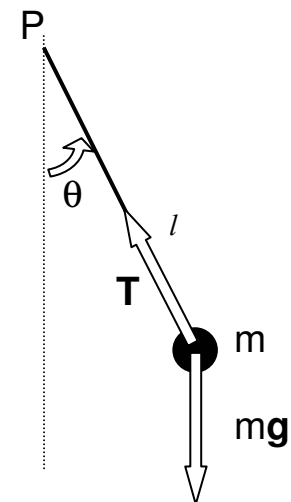


Figura 22

pot desplaçar al llarg de la vareta d'acer, variant la distància respecte de l'extrem, i un pern per a fixar-ne la posició.

Per a fer les mesures, fixem una posició del pes, desplaçem el pèndol de sa posició d'equilibri un angle petit (menor de 30°), i mesurem amb un cronòmetre el temps que la massa es torba a fer 50 oscil·lacions. La posició de l'extrem superior del pes es mesura amb un metre graduat al mm, i el cronòmetre té una resolució d'una centèsima de segon, però tenint en compte la nostra imprecisió en prémer els botons, considerarem una resolució instrumental d'una dècima de segon.

El conjunt de les mesures fetes es el que es dóna a la taula,

l (mm)	200 ± 1	300 ± 1	400 ± 1	500 ± 1	600 ± 1	700 ± 1	800 ± 1
50 T (s)	54.3 ± 0.1	61.5 ± 0.1	67.8 ± 0.1	74.0 ± 0.1	79.4 ± 0.1	84.2 ± 0.1	89.5 ± 0.1

Determinem el període, en fem el quadrat per a linealitzar la relació i determinem per propagació d'errors la incertesa en la nova variable. La representació gràfica de les dades (Figura 23), ens mostra una clara tendència que podria ser lineal. En calculem el coeficient de correlació lineal, que resulta ser $r_0 = 0.999891$. De la Taula III veiem que aquesta correlació és molt altament significativa. Per tant, fem l'ajust de les dades a una recta, $Z = T^2 = A + B \cdot L$.

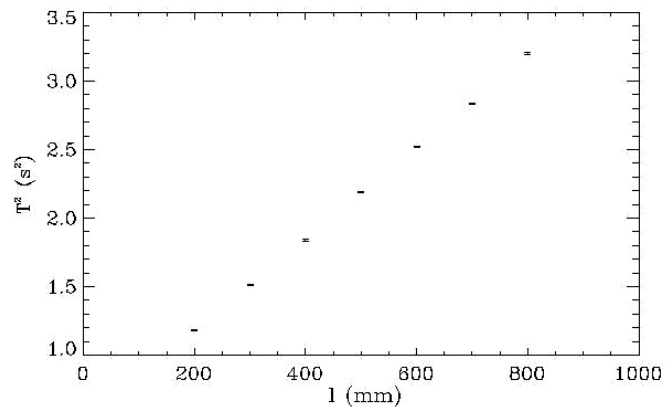


Figura 23

Trobem que els coeficients de l'ajust són $A = (0.506 \pm 0.005) \text{ s}^2$ i $B = (335.4 \pm 1.1) \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{mm}$. La primera cosa que ens xoca és que, amb el nostre ajust, el període d'un pèndol de longitud $L=0$ no s'anul·la, cosa que indica que estem cometent un error sistemàtic important a part o banda.

Si repassem el fonament teòric de la mesura, ens adonem que el sistema ideal considerat consisteix en una massa puntual penjada d'un fil inextensible sense massa, de manera que la longitud que hem de considerar és la del centre de masses. Tenint en compte la massa de la vareta i l'alçada del pes, podem determinar que la posició del centre de masses del sistema és

$$x = \frac{M_{\text{pes}} \cdot \left(l + \frac{h}{2} \right) + m_{\text{var}} \cdot \frac{L}{2}}{M_{\text{pes}} + m_{\text{var}}}$$

de manera que ara tenim

x (mm)	292 ± 1	375 ± 1	458 ± 1	542 ± 1	625 ± 1	708 ± 1	792 ± 1
T^2 (s ²)	1.179 ± 0.004	1.513 ± 0.005	1.839 ± 0.005	2.190 ± 0.006	2.522 ± 0.006	2.834 ± 0.007	3.204 ± 0.008

L'ajust lineal ara ens dóna $A=(0.003 \pm 0.007) \text{ s}^2$ i $B = (402.5 \pm 1.3) 10^{-5} \text{ s}^2/\text{mm}$, de manera que la recta de regressió passa per l'origen sense problemes. Com que $B=(4\pi^2)/g$, trobem finalment que $g = (9810 \pm 30) \text{ mm/s}^2 = (9.81 \pm 0.03) \text{ m/s}^2$.

7. Realització dels experiments i comunicació de resultats.

Habitualment, els resultats del treball experimental no queden confinats a l'àmbit de qui el realitza, sinó que en la majoria d'ocasions s'han de comunicar els resultats a una comunitat més àmplia que no té accés directe al procés d'experimentació. Els criteris generals de comunicació científica tracten de garantir un màxim d'intel·ligibilitat, objectivitat i eficiència en l'intercanvi i acumulació d'informació en aquest tipus de circumstàncies.

Per això, cal en primer lloc recopilar les dades relatives a l'experiment i les condicions de treball en unes *notes experimentals* que ens permetin disposar de tota la informació necessària per a la interpretació dels resultats. Aquestes notes, en principi per a ús intern a l'equip de treball, constitueixen la base sobre la qual elaborar un *informe* de l'experiment, o una publicació especialitzada.

a. Notes experimentals

Durant la realització d'un experiment, l'experimentador té una visió de la situació amb tots els seus detalls que serà irrecuperable en un altre moment. És important doncs que aquesta informació es pugui recuperar quan es necessiti, i no es perdi irremissiblement quan s'hagi oblidat.

Així, el propòsit primordial de les notes és la preservació de les dades sobre les condicions de treball i les observacions i mesures fetes. El principi rector de la presa de notes és escriure amb prou detall i claredat com perquè un altre científic pugui repetir el treball i obtenir el mateixos resultats basant-se en elles. Les notes han de ser clares, concises, i el més completes possible, en el sentit de contenir tota aquella informació que –tant pel que fa a les accions realitzades com al resultat de les mesures– sigui necessària per a comprendre i interpretar posteriorment les dades, o eventualment repetir l'experiment. Per això, és imprescindible elaborar les notes a mesura que es procedeix amb l'experiment, i convé centrar-se a consignar la informació de la manera més completa possible i deixar per a més tard la interpretació. Seguint aquests principis aconseguirem que quan nosaltres mateixos revisem les notes un temps després puguem entendre perfectament el seu contingut.

Les notes han d'estar datades, i es convenient anotar-hi també l'hora de realització del treball. Les pàgines han d'estar numerades consecutivament, i l'ordre en què s'escriu la informació correspon a l'ordre temporal en què s'ha efectuat l'experiment. És convenient utilitzar paper quadriculat, ja que facilita la realització de taules de dades i esquemes que després ens ajudaran a recordar detalls importants.

Pel que fa a la informació continguda, és molt particular de cadascú, però com a norma general sol ser convenient:

1. especificar les condicions de temperatura i humitat del lloc de treball, ja que això afecta la precisió i exactitud de molts d'instruments
2. incloure la marca, model i nombre de sèrie dels instruments utilitzats
3. fer un esquema del muntatge experimental que s'usa

4. explicitar les condicions d'ús dels instruments (fons d'escala, temps de mostreig, amplada de banda, etc.)
5. anotar qualsevol observació que es consideri rellevant al fenomen estudiat
6. incloure les dades recollides en el procés, agrupades en una taula, i si és possible, amb un gràfic esquemàtic que en mostri possibles tendències
7. explicitar qualsevol canvi que es pugui produir en les condicions de treball, indicant l'hora del mateix

b. La memòria o informe

Per a preparar la memòria, cal tenir present que s'adreça a una comunitat diferent, que potser no està al corrent dels detalls de l'experiment, però que ha de ser capaç d'entendre i seguir les nostres passes, i si cal, reproduir l'experiment.

Així, prenent com a base les nostres notes experimentals, el procés d'elaboració és radicalment diferent al de la presa de notes. La memòria ha de tenir una *estructura* on l'element dominant és transmetre el *propòsit* central de la investigació, i la metodologia, resultats i conclusions del nostre treball.

Això no vol dir que totes les memòries es puguin fer amb el mateix motlle: cada camp de treball té una estructura acceptada per la comunitat, que s'ha desenvolupat històricament de manera més o menys consensuada, i que cal respectar per a ser escoltat i acceptat en aquesta comunitat. La millor manera de conèixer quina estructura és la que cal usar és consultar les publicacions especialitzades, que en són un reflex fidel.

En general, però, hi ha una sèrie d'elements comuns que es poden descriure aquí breument. En primer lloc tenim el títol que identifica el treball: ha de ser breu i contenir les paraules clau que descriguin clarament què hem fet. A sota del títol s'hi posarà el nom de la persona (o persones) que han elaborat el treball, acompanyat d'un breu resum que deixi clar l'objectiu principal del treball i doni els resultats finals així com les conclusions més importants. A continuació s'escriu la memòria pròpiament dita. Habitualment comencem amb una introducció on s'exposa el propòsit de l'experimentació, els antecedents del tema, i altres consideracions de caràcter general. També és habitual que al final del text discutim els resultats respecte del propòsit indicat al principi, exposant la nostra *interpretació* de l'experiment. Generalment es remata el text amb una breu síntesi de la investigació i les conclusions principals. Si al llarg del text hem citat referències —com a antecedents de la investigació, o per a invocar una certa teoria, o per a legitimar alguna argumentació, entre d'altres possibilitats— aleshores farem una relació bibliogràfica al final de tot.

El cos de la memòria es pot separar en diverses seccions que ajudin a clarificar els aspectes parcials del treball. Un model convencional d'estructura formal és el següent:

- Títol i autors
- Resum
- Introducció
- Configuració experimental

- Resultats
- Discussió
- Conclusions
- Referències

En tot aquest discurs, ens haurem d'ajudar sovint de recursos addicionals d'acord amb les necessitats específiques del camp d'estudi: fórmules, gràfics, esquemes, taules de dades... De fet, ja n'heu trobat exemples d'ús al llarg d'aquest text, però la millor manera de fer-se una idea sobre les maneres convencionals d'integrar aquests recursos en el text és consultar qualsevol revista científica especialitzada en la biblioteca. Tingueu sempre present que l'objectiu bàsic és la transmissió d'una idea o opinió pròpia sobre el tema del nostre treball que hem desenvolupat en un procés de reflexió i elaboració més o menys llarg, idea que volem transmetre *amb arguments* a l'audiència corresponent.

Per això, cal que el text sigui complet, en el sentit de contenir una argumentació sòlida, essent transparents les raons que ens indueixen a efectuar qualsevol afirmació. L'argumentació es sosté sobre una base objectiva, que són les dades i observacions, i s'ha de distingir clarament entre els fets i les inferències a partir dels fets.

Apèndix I: El principi de màxima versemblança

El principi de màxima versemblança és molt important en el procés d'estimació de paràmetres, i en tots els llibres de text s'analitza en molt de detall. Aquí, només en discutirem els aspectes fonamentals sense entrar en el detall matemàtic del problema, el tractament rigorós del qual és prou complex.

Imagineu per un moment que teniu una variable aleatòria X de la qual en coneixem la distribució o densitat de probabilitat. Per exemple, considereu una variable amb una distribució gaussiana, $G(x; \mu, \sigma)$. Si mesurem aquesta variable N vegades amb un instrument que tingui resolució instrumental Δx , trobarem un conjunt de resultats $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, i ens podem demanar quina és la probabilitat d'obtenir precisament aquesta seqüència de resultats. Aquesta és donada per

$$P(\{x_1, \dots, x_N\} | \mu, \sigma) = \int_{x_1 - \Delta x}^{x_1 + \Delta x} dx G(x; \mu, \sigma) \cdot \dots \cdot \int_{x_N - \Delta x}^{x_N + \Delta x} dx G(x; \mu, \sigma) \approx (2 \cdot \Delta x)^N G(x_1; \mu, \sigma) \cdot \dots \cdot G(x_N; \mu, \sigma)$$

si Δx és prou petit. Per a μ i σ donades, aquesta probabilitat es pot calcular, i clarament, si fem moltes de mesures, tendeix a zero, però ho fa més aviat quan ens allunyem de les proximitats de la mitjana. Aquest efecte és major quan creix el nombre de mesures.

Però podem pensar en aquest problema a l'inrevés: donada una seqüència de mesures, $P(\{x_1, \dots, x_N\} | \mu, \sigma)$ és una funció (anomenada *versemblança*) dels paràmetres de la distribució, en el nostre cas μ i σ . El principi de màxima versemblança el que fa és el raonament oposat al d'abans, dient que si trobem una certa seqüència de mesures, és perquè la *versemblança* d'aquesta seqüència –que ara cal entendre com una funció dels paràmetres de la distribució– és màxima. Això ens permet fer una estimació dels valors d'aquests paràmetres: si la versemblança és

$$L(a_1, \dots, a_K) = P(\{x_1, \dots, x_N\} | a_1, \dots, a_K)$$

aleshores imposem la condició de màxim respecte de cada paràmetre,

$$\frac{\partial L}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_K) = 0 \quad i = 1, \dots, K$$

la qual cosa resulta en un sistema de K equacions amb K incògnites que podeu resoldre, determinant així els valors dels K paràmetres de la distribució de probabilitat subjacent a les dades.

Per exemple, suposeu que llencem una moneda 30 vegades, i que trobem 17 vegades cara i 13 vegades creu. Si considerem que la moneda pot ser trucada, la probabilitat de treure cara és p qualsevol entre 0 i 1, de manera que la probabilitat de treure 17 cares i

13 creus és $L(p) = B(17; p, 30) = \binom{30}{17} p^{17} (1-p)^{13}$, que és zero per a $p=0$ i $p=1$, i positiva

per a $0 < p < 1$. Derivant respecte de p , tenim que la derivada s'anul·la quan $p=17/30$, que correspon a la màxima versemblança.

Bibliografia

El nombre de texts dedicats a l'estadística i el tractament de dades és enorme, i aquí només s'indiquen alguns dels que em semblen més apropiats per a l'objectiu de complementar els temes aquí exposats.

- Roger J. Barlow,
Statistics: a Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences,
John Wiley and Sons (1989).
- Philip R. Bevington,
Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences,
McGraw-Hill (1969).
- Ya-lun Chou,
Statistical Analysis for Business and Economics,
Elsevier (1989).
- Louis Lyons,
A practical guide to Data Analysis for Physical Science Studies,
Cambridge University Press (1991).
- S. Rabinovich,
Measurement Errors, Theory and Practice,
American Institute of Physics (1995).
- V. P. Spiridonov i A. A. Lopatkin
Tratamiento Matemático de Datos Físico-Químicos,
Mir (1983).
- G. L. Squires,
Practical Physics,
Cambridge University Press (1985).
- John R. Taylor,
An Introduction to Error Analysis,
University Science Books (1982).

Programes, Websites i altres eines

A banda dels programes més coneguts que permeten fer tractament de dades dins d'entorns més amplis (MS-Excel, OpenOffice Calc, etc.) hi ha una sèrie de recursos gratuïts que són interessants de conèixer.

OpenStat: és un paquet estadístic lliure desenvolupat p'En Bill Miller, que conté també un manual d'estadística i tractament de dades (en anglès). El podeu trobar a la URL següent: <http://scribers.midwest.net/wgmiller>

XL-Plot: és una versió reduïda del programa lliure "Serf", que conté un mòdul d'entrada de dades, i un de tractament, reduït però eficient. Es pot trobar a la URL següent: <http://www.bram.org/xlplot/xlplot.shtml>. Serf és una versió molt més completa (i difícil d'usar) desenvolupada per al tractament de dades d'electro-medicina.